

# Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie: III. Geodäten in der Raumzeit

U Kraus und C Zahn

Institut für Physik, Universität Hildesheim, Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim

E-mail: [ute.kraus@uni-hildesheim.de](mailto:ute.kraus@uni-hildesheim.de), [corvin.zahn@uni-hildesheim.de](mailto:corvin.zahn@uni-hildesheim.de)

21. August 2018

## **Zusammenfassung.**

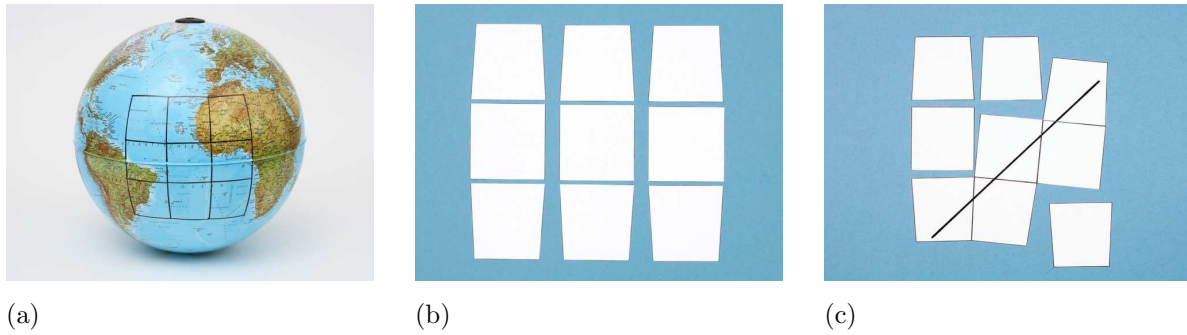
Sektormodelle ermöglichen einen modellbasierten Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie, der auf das Verständnis der geometrischen Konzepte abzielt und in seinen mathematischen Anforderungen nicht über Schulmathematik hinausgeht. Dieser Beitrag zeigt, wie die Bahnen von Licht und freien Teilchen auf einem raumzeitlichen Sektormodell konstruiert werden können. Als Beispiel dienen radiale Bahnen in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Wir beschreiben zwei Workshops zu den Themen gravitative Rotverschiebung sowie radialer freier Fall, die wir in dieser Form mit Bachelorstudierenden durchführen. Der Workshop zur Rotverschiebung setzt keine Kenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie voraus; in dem Workshop zum freien Fall wird die Lorentztransformation als bekannt vorausgesetzt. Der Beitrag beschreibt auch eine vereinfachte Berechnung des verwendeten raumzeitlichen Sektormodells, die von Teilnehmer/innen selbstständig durchgeführt werden kann, falls sie mit der Minkowskimetrik vertraut sind. Die vorgestellten Materialien stehen online unter [www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de](http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de) für den Unterricht zur Verfügung.

## 1. Einleitung

Im Hinblick auf das Ziel, die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu vermitteln und dabei in den mathematischen Anforderungen nicht über Schulmathematik hinauszugehen, entwickeln wir einen Zugang, der auf speziellen Anschauungsmodellen, sogenannten Sektormodellen, basiert. Dahinter steht der Grundgedanke, dass die Allgemeine Relativitätstheorie eine geometrische Theorie ist, die deshalb der geometrischen Anschauung zugänglich ist. Im ersten Teil dieser Folge von Beiträgen haben wir Sektormodelle als Anschauungsmodelle von gekrümmten Räumen und Raumzeiten entwickelt (Zahn und Kraus 2014, im Folgenden als Teil I bezeichnet). Sektormodelle setzen die Darstellung gekrümmter Raumzeiten im Regge-Kalkül (Regge 1961) in Form von gegenständlichen Modellen um. Sektormodelle können zweidimensional sein (z. B. eine Symmetrieebene eines kugelsymmetrischen Sterns), dreidimensional (z. B. der gekrümmte dreidimensionale Raum um ein Schwarzes Loch), 1+1-dimensional (d. h. eine Raumzeit, in der zwei räumliche Dimensionen unterdrückt werden, ähnlich den Minkowskidiagrammen der Speziellen Relativitätstheorie) oder 2+1-dimensional (d. h. eine Raumzeit, in der nur eine räumliche Dimension unterdrückt wird).

Das Prinzip zeigt Abb. 1 am Beispiel der Kugeloberfläche: Die gekrümmte Fläche wird in kleine Bereiche zerlegt, in diesem Beispiel in Vierecke (Abb. 1(a)). Für alle Vierecke werden die Kantenlängen bestimmt. In der Ebene werden Vierecke mit denselben Kantenlängen konstruiert (Abb. 1(b)). Dies sind die Sektoren, die das Sektormodell bilden. Das Sektormodell stellt die gekrümmte Fläche näherungsweise dar. Die Güte der Annäherung ist durch die Feinheit der Unterteilung bestimmt. Für didaktische Zwecke ist eine relativ grobe Unterteilung sinnvoll. An Sektormodellen kann man die Geometrie der dargestellten Räume und Raumzeiten mit grafischen Methoden untersuchen. Dazu gehört die Konstruktion von Geodäten, die im zweiten Teil dieser Folge (Zahn und Kraus 2018, im Folgenden als Teil II bezeichnet) beschrieben wird. Die Konstruktion ist eine zeichnerische Umsetzung der Bestimmung von Geodäten im Regge-Kalkül (Williams und Ellis 1981). Das prinzipielle Vorgehen zeigt Abb. 1(c). Ausgehend von der Definition einer Geodäte als einer lokal geraden Linie wird die Geodäte mit dem Lineal konstruiert: Innerhalb eines Sektors, der ja ein ebenes Flächenstück ist, ist eine Geodäte eine gerade Linie. Wenn die Geodäte den Rand des Sektors erreicht, wird der Nachbarsektor angelegt und die Linie wird über die Kante hinweg geradlinig fortgesetzt. Sektormodelle werden maßstabsgetreu berechnet, so dass die geometrischen Eigenschaften, die man an ihnen abliest, im Rahmen des Diskretisierungsfehlers auch quantitativ korrekt sind. Für Geodäten erzielbare Genauigkeiten werden in Teil II untersucht.

Die Bahnen von Licht und freien Teilchen werden in der Allgemeinen Relativitätstheorie als Geodäten in der Raumzeit beschrieben. Dieser Beitrag zeigt, wie man mithilfe von Sektormodellen Geodäten in der Raumzeit zeichnerisch bestimmen kann. Als Beispiel dienen radiale Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs.



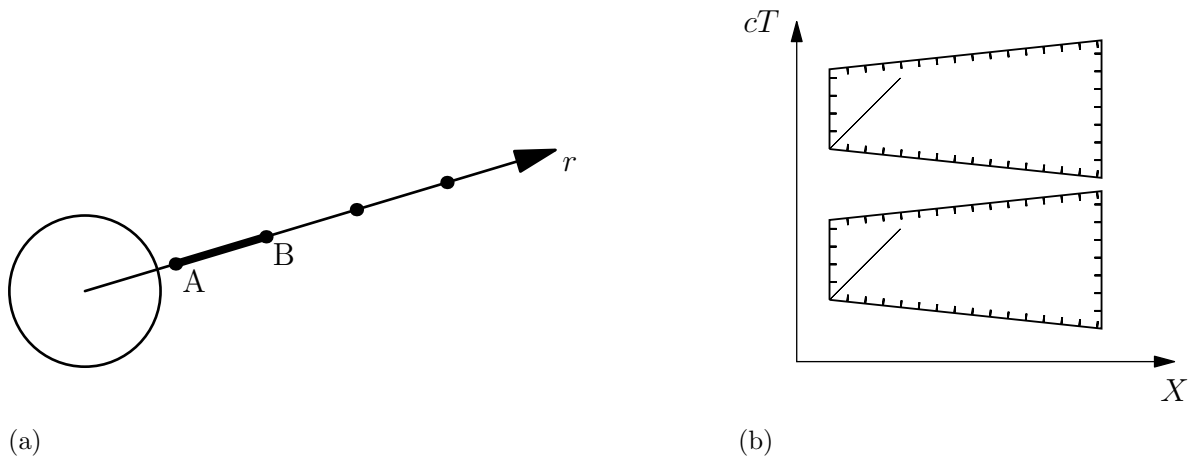
**Abbildung 1.** Sektormodell und Konstruktion von Geodäten am Beispiel der Kugeloberfläche. Die gekrümmte Fläche wird in kleine Bereiche zerlegt (a), deren Kantenlängen bestimmt werden. Die Sektoren werden als ebene Flächenstücke mit denselben Kantenlängen konstruiert (b). Eine Geodäte wird als lokal gerade Linie mit dem Lineal gezeichnet (c).

Wir stellen zwei Workshops vor, die wir in dieser Form mit Bachelorstudierenden durchführen. Im Workshop zur gravitativen Rotverschiebung (Abschnitt 2) werden Nullgeodäten konstruiert, an denen die Rotverschiebung verdeutlicht wird. Der Workshop zum radialen freien Fall (Abschnitt 3) beinhaltet die Konstruktion von radialen zeitartigen Geodäten und den Vergleich mit der Newtonschen Beschreibung des freien Falls sowie der Gezeitenkräfte. Fazit und Ausblick folgen in Abschnitt 4.

## 2. Workshop Rotverschiebung

In diesem Workshop werden Weltlinien von Licht als Geodäten in der Raumzeit konstruiert. Daran wird das Zustandekommen der gravitativen Rotverschiebung verdeutlicht. Als Beispiel dient die Raumzeit eines Schwarzen Lochs, weil die Effekte dort groß und grafisch gut darstellbar sind. Es werden nur radiale Bahnen betrachtet; bei der Darstellung der Raumzeit werden die anderen Raumrichtungen unterdrückt, so dass das raumzeitliche Sektormodell 1+1-dimensional ist.

Der Workshop setzt voraus, dass den Teilnehmer/innen der Begriff der Geodäte als einer lokal geraden Linie sowie Sektormodelle zur Darstellung von Flächen mit Krümmung bekannt sind. Vorkenntnisse in Spezieller Relativitätstheorie sind für diesen Workshop nicht erforderlich. Minkowskidiagramme spielen eine Rolle und bei Bedarf werden sie zu Beginn des Workshops im benötigten Umfang erläutert: Es wird erstens erklärt, dass es sich um Raum-Zeit-Diagramme handelt, bei denen die senkrechte Achse die Zeitachse ist. Um die Teilnehmer/innen mit dieser Darstellung vertraut zu machen, zeigen wir ein Diagramm mit Weltlinien und lassen die darin dargestellte Geschichte erzählen (ein Beispiel steht online zur Verfügung, Kraus und Zahn 2018). Zweitens wird auf die Skalierung der Achsen eingegangen. Sie wird so gewählt, dass die Bewegung eines Lichtpulses im Raum-Zeit-Diagramm durch eine gerade Linie dargestellt wird, die unter  $45^\circ$  zur Zeitachse verläuft. Schließlich werden die Begriffe Ereignis, Weltlinie und Lichtkegel eingeführt.



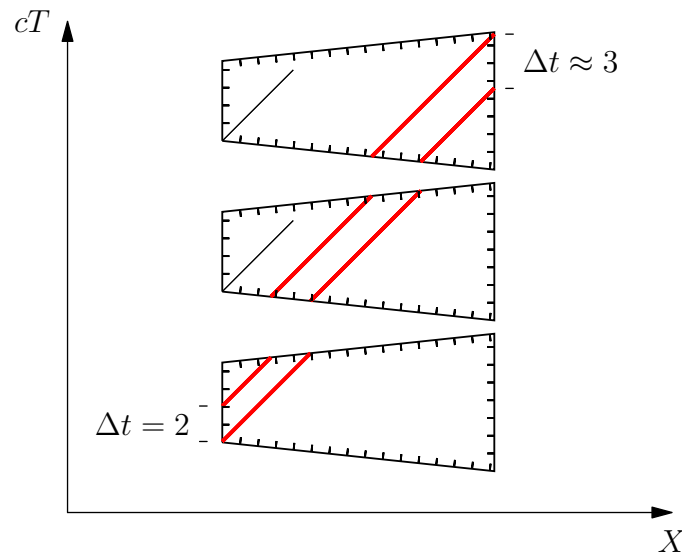
**Abbildung 2.** Sektormodell für die Raumzeit eines radialen Strahls im Außenraum eines Schwarzen Lochs. (a) Radialer Strahl im Außenraum eines Schwarzen Lochs; der Ereignishorizont ist als Kreis markiert. (b) Raumzeitliches Sektormodell für den in (a) kenntlich gemachten Abschnitt. Die linke Kante stellt Ereignisse an Punkt A dar, die rechte Kante an Punkt B. Die diagonalen Linien markieren die Lichtkegel. Das Modell kann in Zeitrichtung durch identische Sektoren beliebig erweitert werden.

### 2.1. Rotverschiebung in der Nähe eines Schwarzen Lochs

Der Workshop beginnt mit der Erläuterung, dass die Allgemeine Relativitätstheorie die Bahnen von Licht und freien Teilchen als Geodäten in der Raumzeit beschreibt. Es wird dann ein Sektormodell vorgestellt, das die Raumzeit eines radialen Strahls im Außenraum eines Schwarzen Lochs darstellt. Die Teilnehmer/innen können das Sektormodell selbst berechnen (Abschnitt 2.2) oder eine Vorlage verwenden (online verfügbar, Kraus und Zahn 2018). Im Gedankenexperiment entsteht das Sektormodell aus Messungen in der Nähe eines Schwarzen Lochs: Astronauten reisen zu dem Schwarzen Loch und positionieren sich dort längs eines radialen Strahls. Sie wählen eine Reihe von Ereignissen aus und nutzen sie als Eckpunkte um die Raumzeit des radialen Strahls in Vierecke einzuteilen. Zur Definition eines einzelnen Vierecks werden zwei Positionen auf dem radialen Strahl ausgewählt (Abb. 2(a)). Zwei Ereignisse an der inneren sowie zwei an der äußeren Position bilden die vier Eckpunkte. Der viereckige Ausschnitt der gekrümmten Raumzeit wird durch einen Sektor eines Minkowskiraums dargestellt (Abb. 2(b)); die Gesamtheit der Sektoren bildet das Sektormodell.‡ Da die Raumzeit des Schwarzen Lochs statisch ist (wir betrachten ein nichtrotierendes Schwarzes Loch), kann man eine Darstellung wählen, in der die Form der Sektoren von der Zeit unabhängig ist. Dies wurde hier umgesetzt§, so dass das Sektormodell in Zeitrichtung durch weitere identische Sektoren beliebig erweitert werden kann. Die

‡ Das Sektormodell überdeckt den Bereich von 1,25 bis 2,5 Schwarzschildradialen in der Schwarzschildschs Radialkoordinate.

§ Die Eckpunkte liegen bei äquidistanten Werten der Schwarzschildschs Zeitkoordinate  $t$ , wobei  $c\Delta t = 1,25$  Schwarzschildradialen beträgt, siehe Abb. 4.



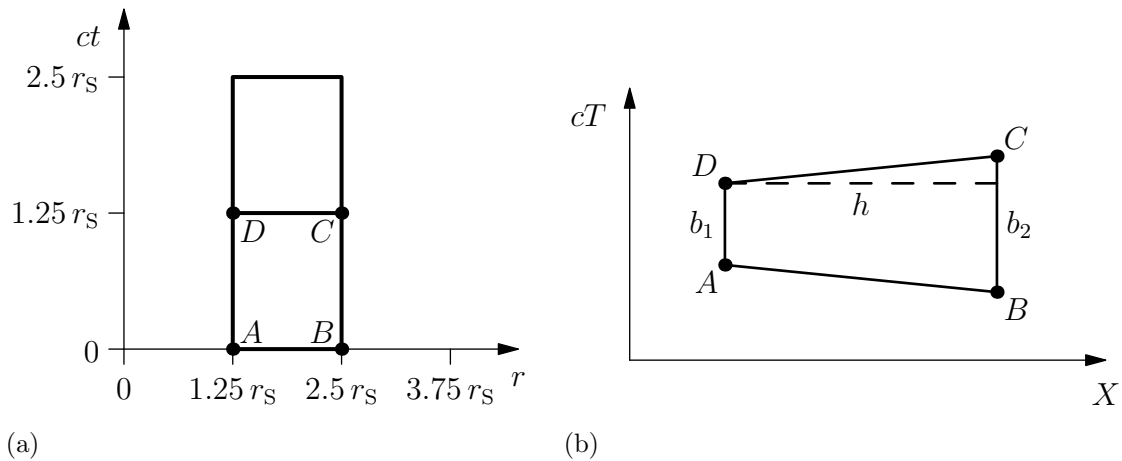
**Abbildung 3.** Weltlinien zweier Lichtsignale, die radial nach außen laufen. Ein Beobachter am Innenrand der Sektorspalte (links) sendet die Signale im Abstand von zwei Zeiteinheiten aus. Ein Beobachter am Außenrand (rechts) empfängt sie im Abstand von ca. drei Zeiteinheiten.

Berechnung des Sektormodells wird in Abschnitt 2.2 im Detail beschrieben.

Auf dem Sektormodell wird als erstes die Weltlinie eines Lichtsignals konstruiert, das radial nach außen läuft. Ausgehend von dem Startpunkt in der linken unteren Ecke des Modells wird eine lokal gerade Linie gezeichnet, die in Richtung des Lichtkegels verläuft (Abb. 3, untere Linie). Innerhalb eines Sektors ist die Linie gerade. Erreicht man beim Zeichnen den Rand, so wird die Linie im Nachbarsektor fortgesetzt: Die Position am Rand wird auf den entsprechenden Rand des Nachbarsektors übertragen; zur Unterstützung tragen die Kanten äquidistante Markierungen. Die Richtung im Nachbarsektor ist, da es sich um eine Weltlinie von Licht handelt, durch den Lichtkegel vorgegeben.||

Im zweiten Schritt wird die Übermittlung von zwei aufeinanderfolgenden Lichtsignalen untersucht. Ein Beobachter, der sich nahe am Schwarzen Loch in einer festen Entfernung (Punkt A am Innenrand der Sektorspalte) befindet, sendet zwei Lichtsignale in kurzem zeitlichem Abstand nach außen. In Abb. 3 beträgt dieser Abstand zwei Zeiteinheiten. Ein zweiter Beobachter, der sich weiter außen ebenfalls in fester Entfernung zum Schwarzen Loch befindet (Punkt B am Außenrand der Sektorspalte), empfängt die beiden Signale. Um festzustellen, in welchem zeitlichen Abstand der äußere Beobachter die Signale erhält, wird die Weltlinie des zweiten Signals hinzugefügt (Abb. 3, obere Linie). Man erkennt, dass der zeitliche Abstand am Außenrand der Spalte rund drei Zeiteinheiten beträgt. Wenn man die beiden Signale als aufeinanderfolgende Wellenberge einer elektromagnetischen Welle deutet, dann folgt aus der Konstruktion,

|| Alternativ kann man den Nachbarsektor anlegen und die Geodäte geradlinig fortsetzen, wie in Abb. 1 beschrieben. Das Vorgehen beim Anlegen von raumzeitlichen Sektoren wird in Abschnitt 3.1 erläutert.



**Abbildung 4.** Zur Berechnung des raumzeitlichen Sektormodells eines radialen Strahls. (a) Die Aufteilung der Raumzeit im Koordinatenraum. (b) Jeder Sektor wird als symmetrisches Trapez konstruiert.

dass die Welle außen mit einer vergrößerten Periode empfangen wird. Strahlung, die sich vom Schwarzen Loch entfernt, wird also rotverschoben. Das Verhältnis der Perioden  $P_{\text{außen}}$  und  $P_{\text{innen}}$  am äußeren Punkt B bzw. am inneren Punkt A ergibt sich aus der Konstruktion zu  $P_{\text{außen}}/P_{\text{innen}} \approx 1,5$ . Der berechnete exakte Wert ist  $P_{\text{außen}}/P_{\text{innen}} = \sqrt{(1 - r_S/r_{\text{außen}})/(1 - r_S/r_{\text{innen}})} = 1,73$  wobei  $r_{\text{innen}} = 1,25 r_S$  und  $r_{\text{außen}} = 2,5 r_S$  die Radialkoordinaten der Punkte A und B sind. Der grafisch bestimmte Wert ist 13% zu klein; diese Abweichung ist der relativ groben Auflösung des Sektormodells geschuldet.

## 2.2. Berechnung des raumzeitlichen Sektormodells

Eine vereinfachte Berechnung von Sektormodellen wird in Teil II (Abschnitt 2.4) eingeführt und hier auf eine 1+1-dimensionale gekrümmte Raumzeit übertragen. Diese Berechnung setzt die Kenntnis der Minkowskimetrik voraus. Mit dem vereinfachten Verfahren kann das Sektormodell von den Teilnehmer/innen des Workshops mit Mitteln der Schulmathematik selbst berechnet werden. Dies versetzt sie in die Lage, auch andere gekrümmte Raumzeiten ausgehend von deren Metrik mit Hilfe von Sektormodellen zu untersuchen. Die mit dem vereinfachten Verfahren verbundenen Näherungen werden in Teil II diskutiert.

Die Konstruktion geht von der Metrik

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 \quad (1)$$

aus, wobei  $t$  und  $r$  die üblichen Schwarzschildkoordinaten sind und  $r_S = 2GM/c^2$  der Schwarzschildradius der Zentralmasse  $M$  mit der Newtonschen Gravitationskonstanten  $G$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Die raumzeitliche Metrik ist eine Funktion, die den Koordinaten zweier Ereignisse das raumzeitliche Intervall dieser Ereignisse zuordnet.

Das in Abschnitt 2.1 eingesetzte Sektormodell stellt einen Teil der 1+1-dimensionalen Schwarzschild-Raumzeit dar. Er überdeckt einen einen Abschnitt eines

radialen Strahls zwischen  $r = 1,25 r_S$  und  $r = 2,5 r_S$  für beliebige Werte der Schwarzschildzeit  $t$ .

Als Erstes wird dieser Teil der Raumzeit in Stücke unterteilt, die hier als Vierecke gewählt werden. Wie in Abb. 4(a) dargestellt, haben deren Eckpunkte die Radialkoordinaten  $r = 1,25 r_S$  oder  $r = 2,5 r_S$  und Zeitkoordinaten  $t$ , für die  $ct$  ein Vielfaches von  $1,25 r_S$  ist. Die Kanten haben also die Koordinatenlängen  $\Delta r = 1,25 r_S$  bzw.  $c\Delta t = 1,25 r_S$ . Im zweiten Schritt werden für jedes Viereck die Intervalle aller vier Seiten berechnet. Da die Metrik von der Zeitkoordinate unabhängig ist, haben die oben definierten Vierecke alle dieselben Kantenintervalle, so dass nur ein einzelnes Viereck berechnet werden muss. Die Berechnung der Kantenintervalle ergibt für die Kanten zu konstanter Radialkoordinate

$$\Delta s_t^2(r) = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \Delta t^2 \quad (\Delta r = 0) \quad (2)$$

und für die Kanten zu konstanter Zeitkoordinate

$$\Delta s_r^2 = \frac{1}{(1 - r_S/r_m)} \Delta r^2 \quad (\Delta t = 0), \quad (3)$$

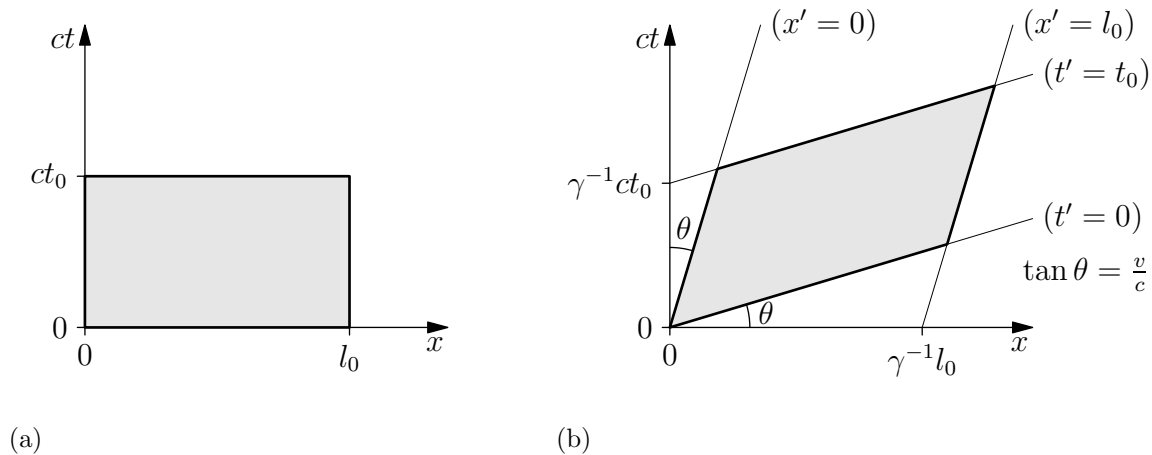
wobei der Metrikoeffizient für die mittlere Koordinate  $r_m = (r_1 + r_2)/2$  berechnet wird, mit den Koordinaten  $r_1$  und  $r_2$  der zugehörigen Eckpunkte. Schließlich wird der Sektor als Viereck im Minkowskiraum mit den oben berechneten Kantenintervallen konstruiert. Diese Konstruktion berücksichtigt, dass das Sektormodell eine Spalte identischer Sektoren darstellt, so dass für den einzelnen Sektor eine zeitsymmetrische Form gefordert werden kann. Der Sektor kann dann wie in Abb. 4(b) als Trapez konstruiert werden. Die Grundseiten des Trapezes sind die Seiten mit konstanter Radialkoordinate. Die Intervalle dieser Seiten sind zeitartig und die Seiten werden im Minkowski-Raum parallel zur Zeitachse gezeichnet mit den Längen  $b_1 = \sqrt{-\Delta s_t^2(r = 1,25 r_S)}$  und  $b_2 = \sqrt{-\Delta s_t^2(r = 2,5 r_S)}$ . Die Höhe  $h$  des Trapezes (Abb. 4(b)) wird so bestimmt, dass die Schenkel das Intervall  $\Delta s_r^2$  haben. Im Minkowskiraum lautet diese Bedingung

$$\Delta s_r^2 = - \left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2 + h^2. \quad (4)$$

Das Ergebnis ist der in Abb. 2 gezeigte Sektor.

### 3. Workshop Teilchenbahnen

In diesem Workshop werden Weltlinien von frei fallenden Teilchen in der Nähe eines Schwarzen Lochs konstruiert. Wie im vorangegangenen Abschnitt werden nur radiale Bahnen betrachtet, so dass ein 1+1-dimensionales raumzeitliches Sektormodell verwendet werden kann. Anhand der Teilchenbahnen wird der Zusammenhang zwischen der relativistischen und der klassischen Beschreibung von Bewegung im Schwerfeld verdeutlicht. Der Workshop setzt voraus, dass die Teilnehmer/innen mit der Lorentztransformation vertraut sind.



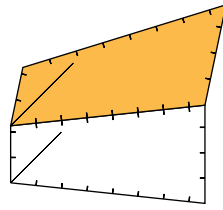
**Abbildung 5.** Grafische Darstellung eines Raumzeitsektors in zwei verschiedenen Bezugssystemen. Die Ereignisse liegen in einem Raumschiff der Länge  $l_0$  bei Bordzeiten zwischen null und  $t_0$ . (a) Darstellung im Ruhesystem des Raumschiffs. (b) Darstellung im Ruhesystem einer Raumstation, an der sich das Raumschiff mit Geschwindigkeit  $v = 0,3c$  vorbeibewegt ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ).

### 3.1. Die Konstruktion zeitartiger Geodäten

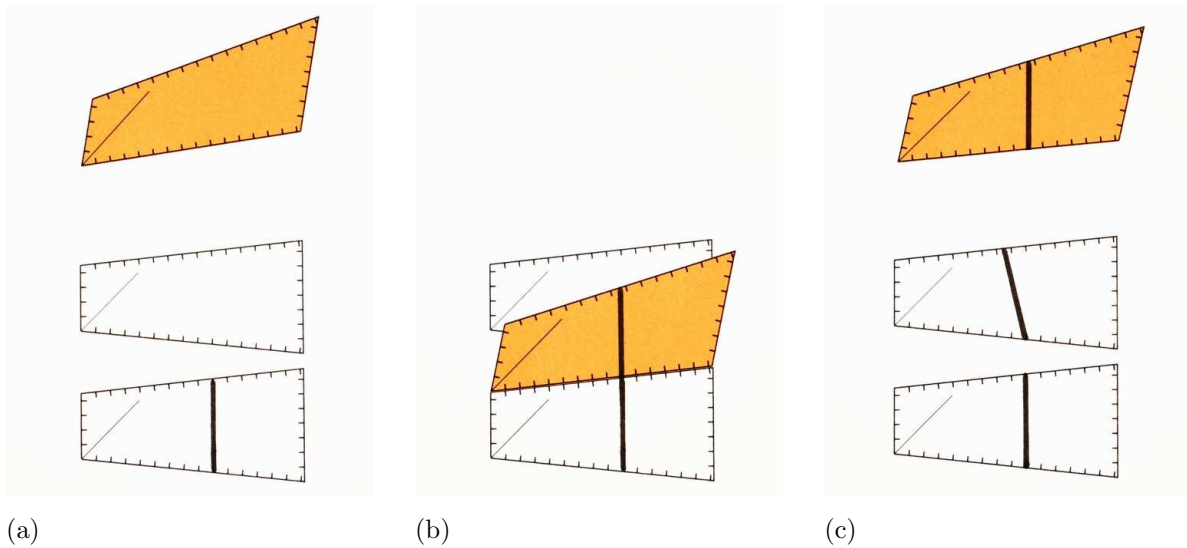
Um die Bahnen frei fallender Teilchen in der Nähe eines Schwarzen Lochs zu untersuchen, werden ihre Weltlinien als Geodäten auf einem Sektormodell konstruiert. Wie in den bisherigen Beispielen werden die Geodäten innerhalb eines Sektors als gerade Linien gezeichnet und beim Erreichen einer Kante in den Nachbarsektor fortgesetzt. Anders als bei den in Abschnitt 2 betrachteten Nullgeodäten ist die Richtung im Nachbarsektor aber nicht durch den Lichtkegel vorgegeben. Man muss also den Nachbarsektor anlegen und die Linie über die gemeinsame Kante hinweg geradlinig fortsetzen. Das Anlegen ist im raumzeitlichen Fall komplizierter als im rein räumlichen. Man sieht leicht ein, dass es nicht damit getan wäre, den Nachbarsektor auszuschneiden und in Position zu drehen: Da die Lichtgeschwindigkeit im Nachbarsektor denselben Wert hat wie im Startsektor, müssen die Lichtkegel der beiden Sektoren zusammenfallen. Dies legt die Orientierung des Nachbarsektors fest.

Im Workshop verwenden wir ein konkretes Beispiel für einen Raumzeitsektor um zu verdeutlichen, auf welche Weise das Anlegen möglich ist. Wir betrachten ein langes, sehr dünnes Raumschiff mit Ruhelänge  $l_0$ . Der Raumzeitsektor soll aus denjenigen Ereignissen bestehen, die innerhalb des Raumschiffs liegen und Bordzeiten zwischen null und  $t_0$  haben. Die Teilnehmer/innen zeichnen diesen Raumzeitsektor in ein Minkowskidiagramm ein, zunächst im Bezugssystem des Raumschiffs. Der Sektor ist ein Rechteck mit Länge  $l_0$  entlang der Raumachse und Länge  $ct_0$  entlang der Zeitachse (Abb. 5(a)). Anschließend wird derselbe Sektor im Bezugssystem einer Raumstation gezeichnet, an der sich das Raumschiff mit konstanter Relativgeschwindigkeit vorbeibewegt (Abb. 5(b)): In diesem Bezugssystem sind die Weltlinien von Bug und





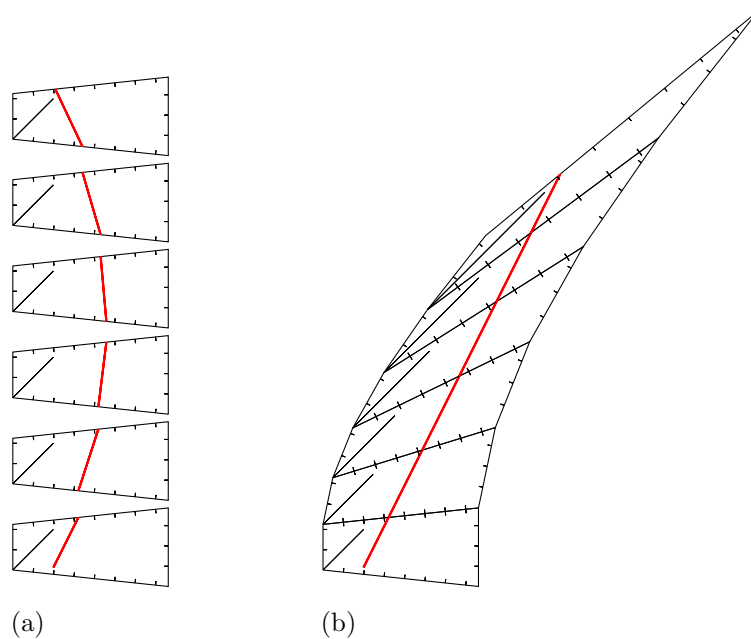
**Abbildung 6.** Anlegen eines raumzeitlichen Sektors im Sektormodell von Abb. 2. Der obere Sektor wurde so transformiert, dass er an den unteren Sektor angelegt werden kann ( $v/c = 0,21$ ).



**Abbildung 7.** Konstruktion einer Geodäte auf dem raumzeitlichen Sektormodell. (a) Ein lorentztransformierter Sektor dient als Transfersektor (farbig markiert). (b) Die Geodäte wird geradlinig auf den Transfersektor fortgesetzt. (c) Die Linie wird vom Transfersektor auf den Nachbarsektor in der ursprünglichen, symmetrischen Form übertragen.

Heck des Raumschiffs gerade Linien, die um den Winkel  $\theta$  gegenüber der Zeitachse geneigt sind, wobei  $\theta$  von der Geschwindigkeit  $v$  des Raumschiffs bestimmt ist ( $\tan \theta = v/c$ ). Die Linien konstanter Bordzeit sind gerade Linien, die mit der Raumachse den Winkel  $\theta$  einschließen; dies spiegelt die Relativität der Gleichzeitigkeit wider. Die Form des Sektors in diesem Bezugssystem erhält man am einfachsten durch Lorentztransformation der Koordinaten der vier Eckpunkte. Abb. 5(a) und (b) sind zwei verschiedene grafische Darstellungen ein und desselben Raumzeitsektors. Sie gehen durch eine Lorentztransformation auseinander hervor. Die gezeichnete Form des Sektors, d. h. seine im euklidischen Sinne verstandene geometrische Form, hängt offensichtlich vom Bezugssystem ab.

Insbesondere ändert die Lorentztransformation eines Sektors die Neigung seiner Kanten. Einer Kante kann deshalb eine gewünschte Neigung gegeben werden, indem



**Abbildung 8.** Senkrechter Wurf. (a) Auf dem Sektormodell konstruierte Geodäte. (b) Werden alle Sektoren aneinandergesetzt, so ist der geradlinige Verlauf der Weltlinie offensichtlich.

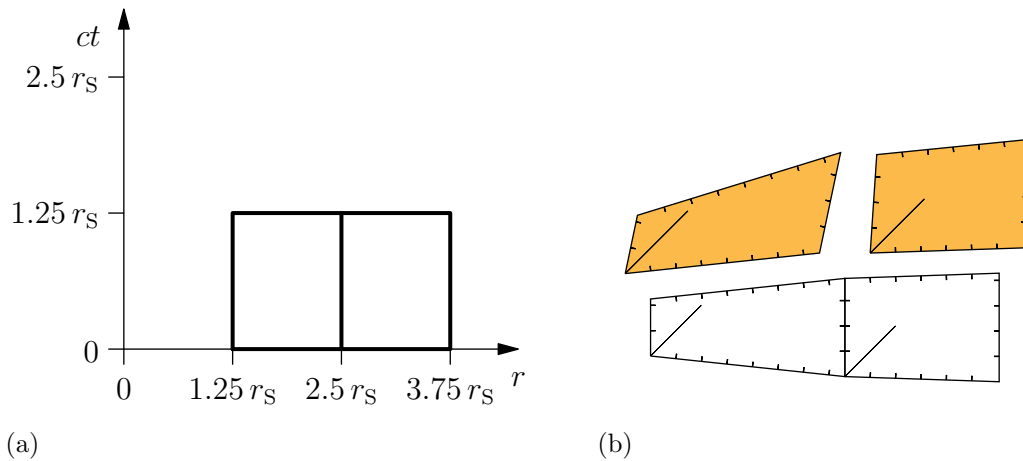
der Sektor mit der passenden Geschwindigkeit lorentztransformiert wird. Dies ermöglicht das Anlegen von benachbarten Sektoren wie in Abb. 6 gezeigt. Die Transformation, die das Anlegen eines Nachbarsektors ermöglicht, ist also im räumlichen Fall eine Rotation, im raumzeitlichen Fall eine Lorentztransformation.

Beim Zeichnen von Geodäten ist es zweckmäßig, einen transformierten Sektor als Transfersektor zu benutzen¶: Eine Geodäte, die den Rand eines Sektors erreicht (Abb. 7(a)), wird über die Kante geradlinig auf den angelegten Transfersektor fortgesetzt (Abb. 7(b)) und anschließend auf den Nachbarsektor in der symmetrischen Form übertragen (Abb. 7(c)). Dieser Übertrag macht die Lorentztransformation rückgängig. Gerade Linien werden dabei wieder in gerade Linien transformiert. Man überträgt anhand der Randmarkierungen die Endpunkte der Linie und verbindet sie geradlinig (Abb. 7(c)).

### 3.2. Senkrechter Wurf

Ein Teilchen wird in der Nähe eines Schwarzen Lochs senkrecht nach oben geworfen. Gesucht ist seine Bahn. Anschaulich ist klar, dass das Teilchen eine maximale Höhe erreicht und anschließend zurückfällt (eine Startgeschwindigkeit kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit vorausgesetzt).

¶ Transfersektoren wurden in Teil II (Abschnitt 2.3) eingeführt. Sie werden eingesetzt, um eine Geodäte von einem Sektor über eine Kante in den Nachbarsektor fortzusetzen. Während ein Transfersektor im rein räumlichen Fall gegenüber dem Originalsektor verdreht ist, ist er im raumzeitlichen Fall lorentztransformiert.



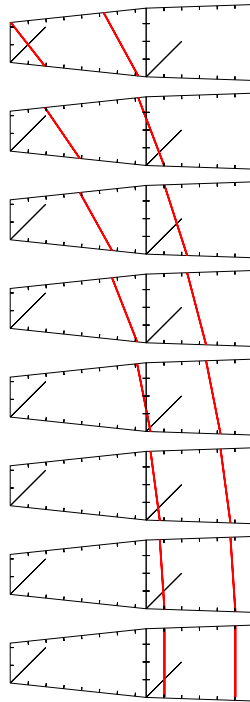
**Abbildung 9.** Raumzeitliches Sektormodell eines radialen Strahls im Außenraum eines Schwarzen Lochs. (a) Aufteilung der Raumzeit im Koordinatenraum. (b) Sektoren in symmetrischer Form (unten) und geeignet lorentztransformierte Transfersektoren (oben). Dies ist eine Erweiterung des in Abb. 2 gezeigten Modells um eine zweite Spalte mit zugehörigem Transfersektor (rechts,  $v/c = 0,067$ ). Das Modell kann in Zeitrichtung durch identische Zeilen erweitert werden.

In der relativistischen Beschreibung folgt das Teilchen, da es sich im freien Fall befindet, einer Geodäten, d. h. seine Weltlinie ist lokal gerade. Wie sind diese beiden Aussagen – geradlinige Weltlinie einerseits und Auf-/Abbewegung andererseits – miteinander vereinbar?

Zur Konstruktion der Weltlinie wird das Sektormodell aus Abb. 2 mit sechs Zeilen verwendet sowie ein passend transformierter Transfersektor (Abb. 6). Nach der Vorgabe eines Startorts und einer zeitartigen, nach außen weisenden Startrichtung wird die Weltlinie als Geodäte auf das Sektormodell gezeichnet (Abb. 8(a)): Die als lokal gerade Linie konstruierte Geodäte erreicht zunächst größere Abstände vom Schwarzen Loch und dann wieder kleinere. Die raumzeitliche Geodäte liefert also die erwartete Auf- und Abbewegung im Raum. Ergänzend sind in Abb. 8(b) alle Sektoren aneinander angefügt, so dass der geradlinige Verlauf der Linie offensichtlich ist. Um die Geodäte wie in dieser Abbildung am Stück zu zeichnen, benötigt man etliche, mit verschiedenen Geschwindigkeiten lorentztransformierte Darstellungen des Sektors. Die Konstruktion auf dem Sektormodell zeigt sowohl die gerade Linie in der Raumzeit als auch die Auf-/Abbewegung im Raum und macht so den Zusammenhang zwischen beiden völlig transparent.

### 3.3. Gezeitenkräfte und die Krümmung der Raumzeit

Wenn man zusätzlich zu diesem Workshop auch den in Teil I beschriebenen Workshop über Krümmung durchführt, kann man anhand von Geodäten die physikalische Bedeutung der raumzeitlichen Krümmung verdeutlichen. Hierfür wird das Sektormodell aus Abb. 2 um eine zweite Spalte erweitert (Abb. 9), so dass es den radialen Strahl im Bereich  $1,25 r_S$  bis  $3,75 r_S$  in zwei Spalten überdeckt. Es werden acht Zeilen des Modells



**Abbildung 10.** Die Weltlinien zweier Teilchen, die gleichzeitig aus der Ruhe losgelassen werden und hintereinander auf ein Schwarzes Loch zu fallen.

und ein Transfersektor je Spalte benutzt.

In einem lokalen Inertialsystem, das sich relativ zum Schwarzen Loch momentan in Ruhe befindet, werden zwei in radialer Richtung leicht versetzte Teilchen betrachtet. Sie werden gleichzeitig und aus der Ruhe losgelassen, so dass sie hintereinander radial in das Schwarze Loch fallen. In der klassischen Beschreibung nimmt die Schwerkraft nach außen ab, so dass das äußere Teilchen zu jedem Zeitpunkt eine geringere Beschleunigung erfährt als das innere. Die beiden frei fallenden Teilchen sind deshalb relativ zueinander beschleunigt: Gezeitenkräfte bewirken, dass die Relativgeschwindigkeit der Teilchen anwächst.

In der Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie sind die Weltlinien der beiden Teilchen Geodäten, die anfangs parallel verlaufen. Diese Geodäten werden auf dem Sektormodell konstruiert (Abb. 10). Beide Weltlinien starten in Richtung der lokalen Zeitachse (Abb. 10, unterste Zeile). Die anfänglich parallelen Weltlinien laufen zunehmend auseinander, d. h. es tritt eine Relativgeschwindigkeit auf, die anwächst. Die Konstruktion verdeutlicht, wie die Relativbeschleunigung zustandekommt: Die Weltlinien sind solange parallel, bis sie das erste Mal an einem Vertex auf verschiedenen Seiten vorbeilaufen (Abb. 10, 4./5. Zeile von unten). An jedem weiteren Vertex, der zwischen den Weltlinien liegt, vergrößert sich der Unterschied in den Richtungen und damit die Relativgeschwindigkeit.

Abb. 11 zeigt den Verlauf um einen einzelnen Vertex genauer. Hier werden der Deutlichkeit halber Sektoren verwendet, die in Zeitrichtung die doppelte

Koordinatenlänge haben ( $c\Delta t = 2,5r_S$ ). Die Sektoren sind in den Abbildungen 11(a) und (b) längs der linken bzw. längs der rechten Geodäte aneinandergelegt (wobei die obere Zeile als Ganzes jeweils passend lorentztransformiert ist); in Abb. 11(c) sind die Sektoren symmetrisch angeordnet.

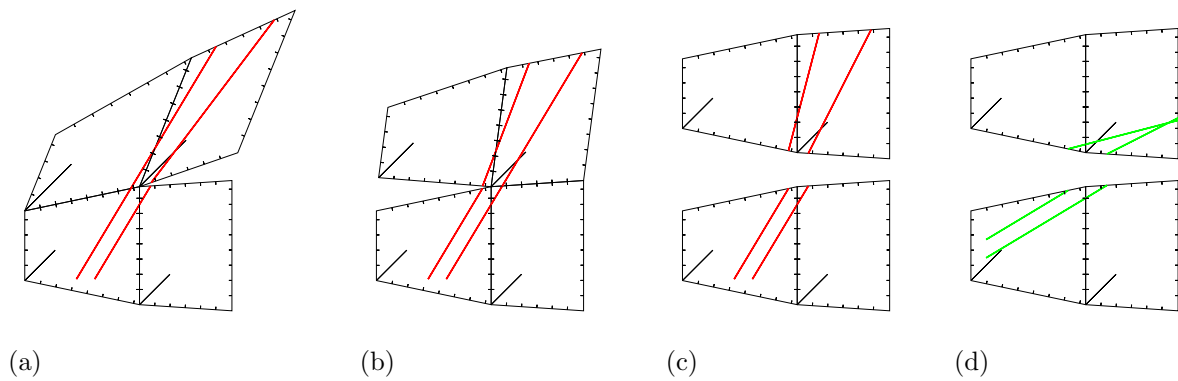
Wie in Teil I beschrieben, geben in einem Sektormodell die sogenannten Defizitwinkel der Vertizes die Krümmung an. Der Defizitwinkel des hier betrachteten Vertex erscheint in den Abbildungen 11(a) und (b), in denen die vier Sektoren um den gemeinsamen Vertex bestmöglich zusammengelegt sind, als verbleibende Lücke. Dieser Defizitwinkel liegt in raumartiger Richtung und ist positiv<sup>+</sup>; mit der hier verwendeten Signatur ist nach Konvention die raumzeitliche Krümmung positiv. Nach Konstruktion hängt der Winkel, den die Richtungen der anfangs parallelen Geodäten nach dem Vertex einschließen, mit dem Defizitwinkel zusammen. Die Abbildungen 10 und 11 zeigen also, dass eine positive raumzeitliche Krümmung mit dem Auseinanderlaufen von anfangs parallelen benachbarten Weltlinien verbunden ist; das Umgekehrte gilt für den Fall negativer Krümmung. Die raumzeitliche Krümmung ist der Anschauung weniger gut zugänglich als die räumliche. Der Verlauf benachbarter Weltlinien liefert aber ein anschauliches Kriterium. Die Konstruktion zeigt damit auf, wie die Relativbeschleunigung der beiden Teilchen in der relativistischen Beschreibung zustandekommt. Sie lässt sich auf die Defizitwinkel an den Vertizes und damit auf die Krümmung zurückführen. Hieran wird die physikalische Bedeutung der raumzeitlichen Krümmung deutlich: Sie entspricht der Newtonschen Gezeitenkraft.

Ergänzend zeigt Abb. 11(d) das Verhalten anfänglich paralleler raumartiger Geodäten an demselben Vertex: Sie laufen nach dem Vertex aufeinander zu. Das gegenläufige Verhalten von zeitartigen und raumartigen Geodäten spiegelt das entsprechende Verhalten der Defizitwinkel in zeitartiger bzw. in raumartiger Richtung wider (s. Teil I, Abschnitt 4).

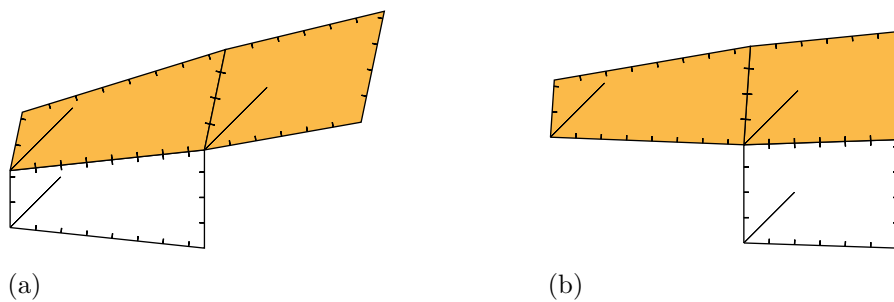
### 3.4. Konstruktion von Geodäten mit Transfer-Doppelsektoren

Bei der oben beschriebenen Konstruktion von Geodäten kommt es vor, dass die Linie in einem angelegten Sektor sehr kurz ist, weil sie nahe an einem Eckpunkt vorbeiläuft (beispielsweise in Abb. 10, 4. Zeile von unten, linke Linie). In diesem Fall wird die Konstruktion sehr ungenau, weil die weitere Richtung aus dieser kurzen Linie bestimmt wird. Das Problem lässt sich lösen, indem man statt eines einzelnen Transfersektors einen Doppelsektor benutzt (Abb. 12). Hierfür wird der Sektor der Nachbarspalte nach passender Lorentztransformation an den Transfersektor angefügt. Die Linie auf dem Doppelsektor ist dann länger, so dass die Konstruktion genauer wird. Im Workshop verwenden wir zur Einführung zunächst die Einzelsektoren aus Abb. 9. Wenn das Prinzip klar geworden ist, gehen wir zu den Doppelsektoren aus Abb. 12 über.

<sup>+</sup> Der Defizitwinkel ist positiv, wenn nach Zusammenschieben aller an einen Eckpunkt angrenzenden Sektoren eine keilförmige Lücke verbleibt. Er ist negativ, wenn nach Zusammenschieben aller an einen Eckpunkt angrenzenden Sektoren bis auf einen die verbleibende Lücke zu klein ist für den letzten



**Abbildung 11.** Anfänglich parallele Geodäten, die an einem Vertex auf verschiedenen Seiten vorbeilaufen, sind anschließend nicht länger parallel. Die Sektoren sind in (a) längs der linken Geodäte und in (b) längs der rechten Geodäte aneinandergelegt; in (c) sind sie symmetrisch angeordnet. (d) Raumartige Geodäten zeigen ein gegenläufiges Verhalten. (Sektormodell wie in Abb. 9, aber mit der doppelten zeitlichen Koordinatenlänge,  $c\Delta t = 2,5 r_S$ .)



**Abbildung 12.** Doppelsektoren als Transfersektoren. (a) Für die linke Spalte des Sektormodells von Abb. 9, (b) für die rechte Spalte.

## 4. Fazit und Ausblick

### 4.1. Zusammenfassung und didaktische Anmerkungen

Wir haben in diesem Beitrag gezeigt, wie auf raumzeitlichen Sektormodellen die Bahnen von Licht und freien Teilchen konstruiert werden können. Die Konstruktion von Nullgeodäten führt auf direktem Weg zum Phänomen der Gravitationsrotverschiebung (Abschnitt 2.1). Die Konstruktion zeitartiger Geodäten verdeutlicht, dass die Beschreibung eines nach oben geworfenen Teilchens durch eine Geodäte in der Raumzeit die erwartete Auf-/Abbewegung im Raum ergibt (Abschnitt 3.2). Anhand zeitartiger Geodäten benachbarter Teilchen wird der Zusammenhang der raumzeitlichen Krümmung mit der Newtonschen Gezeitenkraft deutlich (Abschnitt 3.3).

Im Zusammenhang mit dem Einsatz raumzeitlicher Sektormodelle kann das Äquivalenzprinzip thematisiert werden, das hier deutlich zum Ausdruck kommt. Es besagt, dass in genügend kleinen Gebieten einer gekrümmten Raumzeit Sektor.

Minkowskigeometrie besteht und lokal alle physikalischen Phänomene durch die Spezielle Relativitätstheorie beschrieben werden. Im Sektormodell stellt jeder einzelne Sektor ein solches kleines Gebiet dar. Die gekrümmte Raumzeit wird explizit aus lokalen Bereichen mit Minkowskigeometrie zusammengesetzt. Im Sektormodell kann man sich von einem Minkowskisektor zum nächsten durch die gekrümmte Raumzeit hangeln. Dass lokal die Spezielle Relativitätstheorie gilt, wird auf dem Sektormodell in direkter Weise umgesetzt, wenn die Weltlinien von Licht und freien Teilchen innerhalb eines Sektors als Geraden gezeichnet werden.

Das Sektormodell in diesem Beitrag stellt einen 1+1-dimensionalen Unterraum der Schwarzschild-Raumzeit dar. Damit können Weltlinien in radialer Richtung konstruiert werden. Nichtradiale Weltlinien kann man im Prinzip in einem 2+1-dimensionalen Sektormodell bestimmen, die Durchführung mit einem Papier- oder Pappmodell erscheint jedoch nicht praktikabel. Eine Umsetzung als dreidimensionale interaktive Computervisualisierung wird derzeit untersucht.

Die in diesem Beitrag vorgestellten Workshops zu Rotverschiebung und Teilchenbahnen wurden im Rahmen einer Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie für Lehramtsstudierende an der Universität Hildesheim entwickelt und erprobt (Zahn und Kraus 2013, Kraus et al 2018). Dieser Einführungskurs nutzt den hier beschriebenen modellbasierten Zugang inklusive der Berechnung von Sektormodellen aus der Metrik. Die Berechnung wird ausgehend von der Kugeloberfläche über die Äquatorfläche des Schwarzen Lochs (Teil II, Abschnitt 2.4) bis hin zur Raumzeit eines radialen Strahls (Abschnitt 2.2) schrittweise eingeführt. Der Kurs nutzt das in den Teilen I bis III vorgestellte Material sowie weiteres Material aus dem in Vorbereitung befindlichen vierten Teil. In den Übungen zur Vorlesung erstellen die Studierenden u. a. Sektormodelle zu weiteren Metriken und untersuchen mit ihnen Krümmung und Geodäten. Der modellbasierte Kurs vermittelt also die Fähigkeit, in einem gewissen Rahmen anhand einer vorgegebenen Metrik physikalische Phänomene zu untersuchen. Es werden dabei Aufgaben zeichnerisch gelöst, die in einem Standardkurs rechnerisch bearbeitet würden. Ein Beispiel für eine Aufgabe, die mit den Mitteln des modellbasierten Kurses gelöst werden kann: „Gegeben ist die Metrik eines radialen Strahls in einer expandierenden Raumzeit als  $ds^2 = -c^2 dt^2 + (t/T_0)^2 dx^2$ , wobei  $T_0$  eine Konstante ist. Zwei Beobachter auf festen Ortskoordinaten senden einander Lichtsignale zu. Tritt eine Rotverschiebung auf?“. Über den Lehramtskurs und seine Evaluation berichten Kraus et al (2018).

Weitere Einsatzmöglichkeiten, beispielsweise in einer schulischen Arbeitsgemeinschaft Astronomie, gibt es insbesondere für den Workshop über Rotverschiebung, da er ohne Vorkenntnisse der Teilnehmer/innen in Spezieller Relativitätstheorie auskommt. Das gesamte Material kann auch als Ergänzung zu einer mathematisch ausgerichteten Vorlesung eingesetzt werden um das geometrische Verständnis zu fördern.

#### 4.2. Vergleich mit anderen anschaulichen Zugängen

Sektormodelle ermöglichen eine bildliche Darstellung raumzeitlicher Geodäten. Andere bildliche Darstellungen von Geodäten in einer Raumzeit wurden auf Einbettungsflächen beschrieben (Marolf 1999, Jonsson 2001, 2005). Wie bei den hier vorgestellten Sektormodellen sind auch diese Darstellungen auf 1+1-dimensionale Raumzeiten beschränkt. Mit der Darstellung auf Sektormodellen verwandt ist die von diSessa entwickelte Konstruktion auf sogenannten Keilkarten (wedge maps, diSessa 1981). Diese Konstruktion ist vom Regge-Kalkül abgeleitet und wird numerisch durchgeführt. Die Rechnung wird auch für 2+1-dimensionale Raumzeiten beschrieben; Lichtablenkung und Rotverschiebung werden diskutiert.

Im Vergleich zu Einbettungsflächen und auch zu den Keilkarten ist die Berechnung und Nutzung von Sektormodellen elementarer. Selbst für ein raumzeitliches Modell werden nur Grundkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie benötigt; die Bestimmung von Geodäten erfolgt zeichnerisch, das einzige mathematische Konzept, das über Schulmathematik hinausgeht, ist der Begriff der Metrik. Sektormodelle lassen sich auf einfache Weise berechnen und da sie sich gut vervielfältigen lassen, können alle Teilnehmer/innen eines Kurses die Konstruktion von Geodäten auf eigenen Vorlagen selbst durchführen.

#### 4.3. Ausblick

Die in Teil I aufgeworfenen drei Grundfragen nach dem Wesen einer gekrümmten Raumzeit, den Gesetzmäßigkeiten für die Bewegung von Materie und dem Zusammenhang zwischen der Materieverteilung und der Krümmung der Raumzeit sollen in dem hier vorgestellten modellbasierten Zugang anhand von Sektormodellen behandelt werden. In Teil I wurden gekrümmte Räume und Raumzeiten im Modell dargestellt, in Teil II und dem vorliegenden Beitrag Geodäten als Bahnen von Licht und freien Teilchen bestimmt. Ein Folgebeitrag wird als vierter Teil den Zusammenhang von Krümmung und Materieverteilung beschreiben.

### Literatur

- diSessa A 1981 An elementary formalism for general relativity *Am. J. Phys.* **49** (5) 401–11
- Jonsson R M 2001 Embedding spacetime via a geodesically equivalent metric of euclidean signature *Gen. Rel. Grav.* **33** (7) 1207–35
- Jonsson R M 2005 Visualizing curved spacetime *Am. J. Phys.* **73** (3) 248–60
- Kraus U, Zahn C, Reiber T und Preiß S 2018 A model-based general relativity course for physics teachers, *Proceedings of ESERA 2017*, eingereicht
- Kraus U und Zahn C 2018 Online-Ressourcen zum Beitrag,  
[www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels3](http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels3)



- Marolf D 1999 Spacetime embedding diagrams for black holes *Gen. Rel. Grav.* **31** (6) 919–44
- Regge T 1961 General relativity without coordinates *Il Nuovo Cimento* **19** 558–71
- Williams R M und Ellis G F R 1981 Regge Calculus and Observations. I. Formalism and Applications to Radial Motion and Circular Orbits *Gen. Rel. Grav.* **13** (4) 361–95
- Zahn C und Kraus U 2013 Bewegung im Gravitationsfeld in der Allgemeinen Relativitätstheorie – ein neuer Zugang auf Schulniveau *PhyDid B* DD 17.13
- Zahn C und Kraus U 2014 Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. I: Gekrümmte Räume und Raumzeiten, [www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1](http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1),  
Deutsche Übersetzung von:  
Sector models—A toolkit for teaching general relativity: I. Curved spaces and spacetimes *Eur. J. Phys.* **35** (5) 055020  
(Teil I)
- Zahn C und Kraus U 2018 Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. II: Geodäten, [www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels2](http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels2),  
Deutsche Übersetzung von:  
Sector models—A toolkit for teaching general relativity: II. Geodesics, eingereicht  
(Teil II)