

Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie: II. Geodäten

C Zahn und U Kraus

Institut für Physik, Universität Hildesheim, Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim

E-mail: corvin.zahn@uni-hildesheim.de, ute.kraus@uni-hildesheim.de

21. August 2018

Zusammenfassung.

Sektormodelle sind Werkzeuge, mit denen die Grundprinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie vermittelt werden können, ohne bei der Formulierung über Schulmathematik hinauszugehen. Dieser Beitrag zeigt, wie Sektormodelle dazu verwendet werden können Geodäten zu bestimmen. Wir stellen einen Workshop für Schüler/innen und Studierende vor, in dem die gravitative Lichtablenkung mittels der Konstruktion von Geodäten auf Sektormodellen behandelt wird; als Beispiel dienen Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Der Beitrag beschreibt ferner eine vereinfachte Berechnung von Sektormodellen, die Schüler/innen und Studierende selbst durchführen können. Die Genauigkeit der auf Sektormodellen konstruierten Geodäten wird im Vergleich mit numerisch berechneten Lösungen diskutiert. Die vorgestellten Materialien stehen online unter www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de für den Unterricht zur Verfügung.

1. Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie ohne den mathematischen Apparat in ihren Grundzügen zu vermitteln ist ein Anliegen, das auch hundert Jahre nach der Entwicklung der Theorie nichts an Aktualität verloren hat. Im Hinblick auf dieses Ziel beschreiben wir einen neuen Zugang, der mit Schulmathematik auskommt. Zielgruppe sind Schüler/innen der Sekundarstufe sowie Bachelor-, Lehramts- und Nebenfachstudierende, d. h. Interessent/innen, denen entweder das Vorwissen oder die Zeit fehlen, um sich den für die übliche Darstellung benötigten mathematischen Apparat anzueignen. Dieser Zugang kann aber auch als Ergänzung zu Standardlehrbüchern (z. B. Hartle 2003) eingesetzt werden, um ein anschauliches, geometrisches Verständnis zu fördern.

In einer ersten Arbeit (Zahn und Kraus 2014, im Folgenden als Teil I bezeichnet) haben wir Sektormodelle als neuen Typ von Anschauungsmodellen für gekrümmte Räume und Raumzeiten entwickelt. Wir haben aufgezeigt, wie mit ihrer Hilfe eine Vorstellung von gekrümmten Räumen und Raumzeiten vermittelt werden kann. Sektormodelle werden in Teil I anhand von zweidimensionalen, positiv bzw. negativ gekrümmten Flächen eingeführt und dann am Beispiel des Schwarzen Lochs auf dreidimensionale gekrümmte Räume und 1+1-dimensionale gekrümmte Raumzeiten erweitert.

Sektormodelle realisieren die im Regge-Kalkül eingesetzte Darstellung gekrümmter Raumzeiten (Regge 1961) in Form von gegenständlichen Modellen. Abb. 1 illustriert das Prinzip am Beispiel der Erdoberfläche: Die Oberfläche der Erdkugel wird durch kleine, ebene Flächenstücke angenähert. Legt man die Flächenstücke in der Ebene aus, erhält man eine Weltkarte; diese stellt das Sektormodell der Erdoberfläche dar. Zwei Unterschiede zu üblichen Weltkarten fallen ins Auge: Die aus Sektoren bestehende Weltkarte hat kein geschlossenes Kartenbild, da sich die Sektoren nicht sämtlich lückenlos aneinanderfügen lassen. Und die Sektorkarte ist im Rahmen der Diskretisierungsfehler unverzerrt, d. h. sowohl längen- als auch winkeltreu und daher unmittelbar der geometrischen Anschauung zugänglich. Das Sektormodell eines gekrümmten dreidimensionalen Raums ist analog aufgebaut; an die Stelle der ebenen Flächenstücke treten Klötzchen, deren innere Geometrie euklidisch ist. Im Falle einer gekrümmten Raumzeit sind die Sektoren Raumzeitelemente mit Minkowski-Geometrie.

Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Bahnen von Licht und freien Teilchen als Geodäten einer im Allgemeinen gekrümmten Raumzeit. Das Konzept der Geodäte ist deshalb ein wichtiger Punkt jeder Einführung in die Relativitätstheorie. Der vorliegende Beitrag zeigt, wie anhand von Sektormodellen der Begriff der Geodäte eingeführt und Geodäten zeichnerisch ermittelt werden können. An die Stelle der Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen tritt die Konstruktion mit dem Lineal. Die Konstruktion der Geodäten entspricht der Beschreibung von Geodäten im Regge-Kalkül (Williams und Ellis 1981) und liefert im Rahmen des Diskretisierungsfehlers quantitativ richtige Resultate.

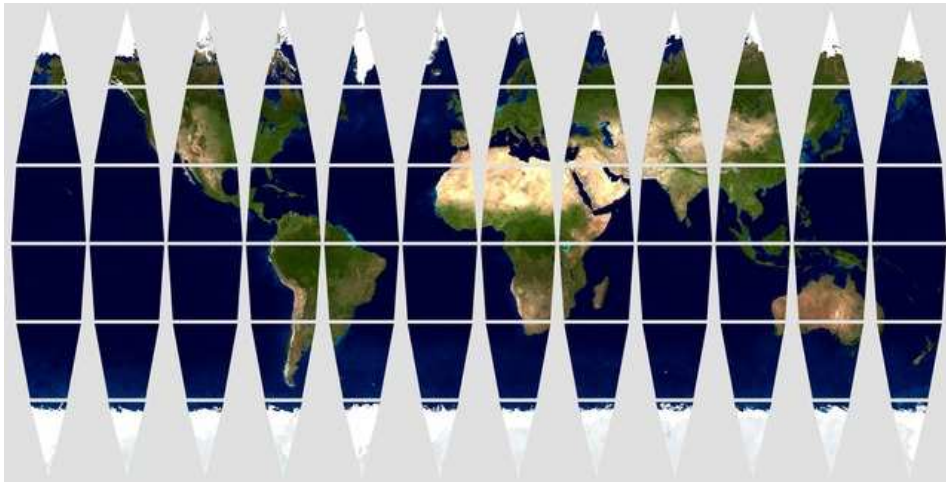


Abbildung 1. Sektormodell der Erdoberfläche. Erdtextur: NASA.

In diesem Beitrag stellen wir einen Workshop zur gravitativen Lichtablenkung vor, den wir in dieser Form mit Schüler/innen sowie mit Studierenden durchführen (Abschnitt 2). In Abschnitt 3 werden die Näherungen diskutiert, die mit der Konstruktion von Geodäten auf Sektormodellen verbunden sind und es wird die erzielbare Genauigkeit untersucht. Fazit und Ausblick folgen in Abschnitt 4.

2. Workshop Geodäten und Lichtablenkung

In diesem Workshop wird zunächst am Beispiel von gekrümmten Flächen der Begriff der Geodäte eingeführt. Es wird dann das Zustandekommen der gravitativen Lichtablenkung verdeutlicht, indem auf einem Sektormodell eines Schwarzen Lochs Geodäten konstruiert werden. Das Schwarze Loch wird als Beispiel gewählt, weil in seiner Nähe relativistische Effekte groß und deshalb in den Zeichnungen klar zu erkennen sind. Als Erweiterung des Workshops wird beschrieben, wie Schüler/innen und Studierende in einem vereinfachten Verfahren selbstständig zweidimensionale Sektormodelle erstellen können. Dies versetzt sie in die Lage, Geodäten einer gegebenen Raumzeit ausgehend von deren Metrik zu untersuchen.

2.1. Geodäten auf gekrümmten Flächen

In der Einführung zum Workshop wird erläutert, dass die Allgemeine Relativitätstheorie Lichtwege und Bahnen frei fallender Teilchen als Geodäten beschreibt. Je nach Teilnehmerkreis kann die Bedeutung von Geodäten in der Relativitätstheorie lediglich mitgeteilt oder aber mit Bezug auf das Äquivalenzprinzip näher erläutert werden (z. B. Natário 2011, Kap. 5). Als Vorbereitung für die Bestimmung von Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs werden zunächst Geodäten auf gekrümmten Flächen veranschaulicht.

Eine Geodäte auf einer gekrümmten Fläche wird als lokal gerade Linie eingeführt.



Abbildung 2. Die Geodäten auf der Kugeloberfläche sind die Großkreise.

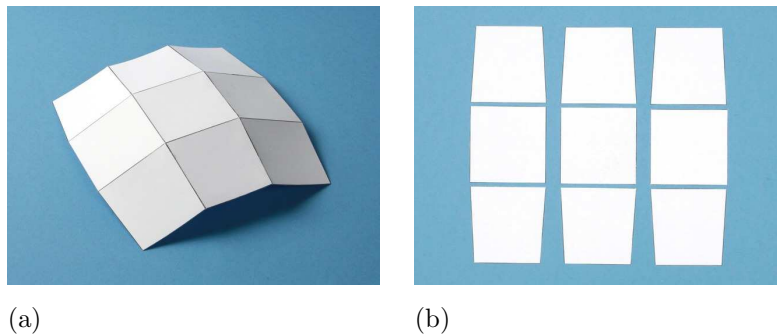


Abbildung 3. Eine Kugelkalotte wird durch eine Facettenfläche angenähert (a) und als Sektormodell dargestellt (b).

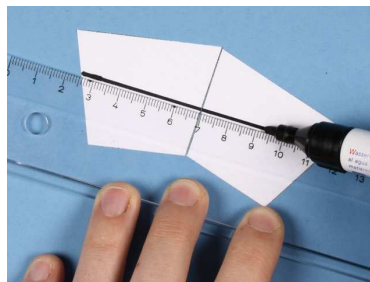


Abbildung 4. Konstruktion einer Geodäte auf einem Sektormodell.

Eine solche Linie behält an jedem Punkt ihre Richtung bei, macht also keinen Bogen und keinen Knick. Es wird ein anschauliches Kriterium dafür angegeben, ob eine Linie eine Geodäte ist: Man denkt sich einen schmalen Streifen aus einem nicht dehnbaren Material längs seiner Mittellinie auf die zu untersuchende Linie geklebt. Falls die Linie einen Bogen macht, reißt der Streifen auf der Außenseite ein und wirft auf der Innenseite Falten – dies zeigt an, dass es sich nicht um eine Geodäte handelt.

Als erstes Beispiel dient die Oberfläche einer Kugel (Abb. 2). Es wird eine Linie betrachtet, die am Äquator in Richtung Nordpol startet und lokal gerade verläuft. Sie liegt offensichtlich auf einem Längskreis. Längskreise, allgemeiner alle Großkreise, sind also Geodäten auf der Kugeloberfläche. Abb. 2 illustriert eine charakteristische Eigenschaft dieser Geodäten: Zwei Längskreise sind am Äquator parallel; in ihrem weiteren Verlauf zum Pol hin nähern sie sich einander an. Allgemein formuliert heißt

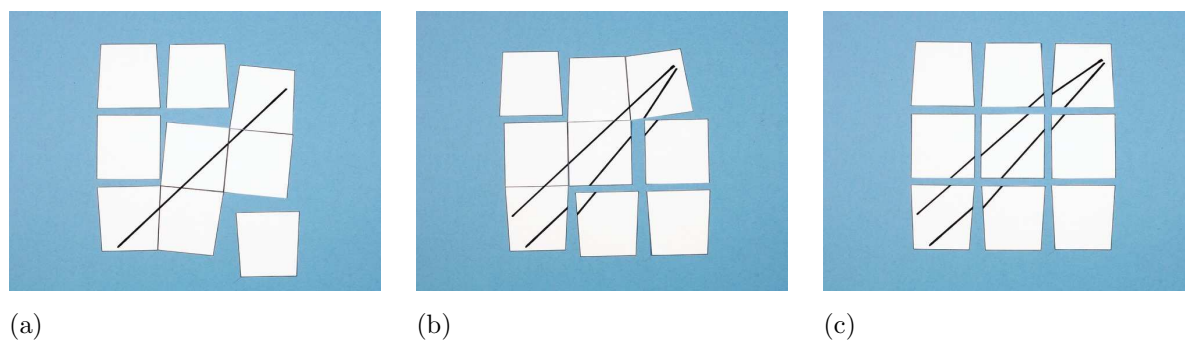


Abbildung 5. Geodäten auf dem Sektormodell einer Kugelkalotte. Die Sektoren sind in (a) längs der unteren Geodäte aneinandergelegt und in (b) längs der oberen. Im linken unteren Sektor verlaufen die beiden Geodäten parallel, nach rechts nähern sie sich einander an ((b), (c)).

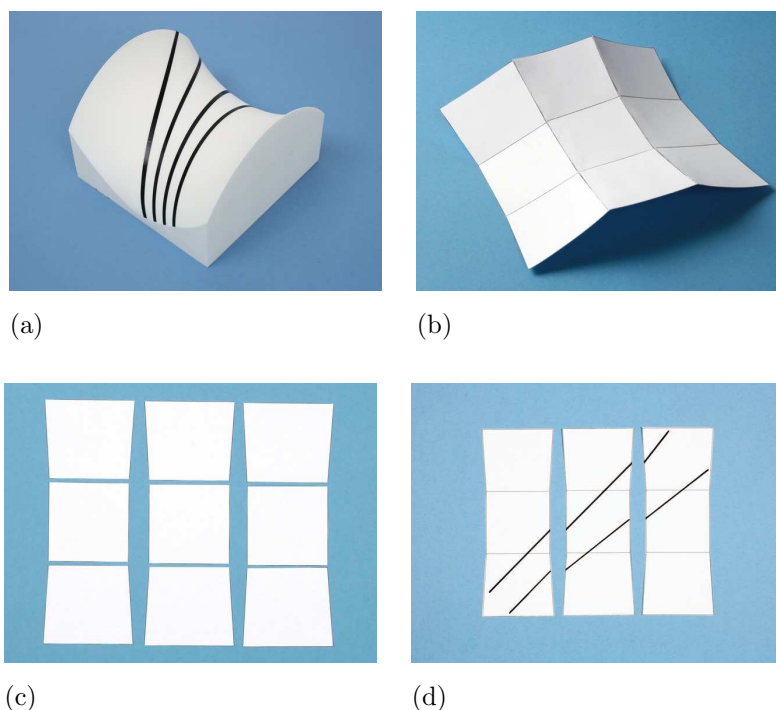


Abbildung 6. Aus einer Sattelfläche (a) wird ein Ausschnitt über die Annäherung als Facettenfläche (b) als Sektormodell dargestellt (c); parallel startende Geodäten laufen auseinander ((a), (d)).

das für die Kugeloberfläche, dass parallel startende Geodäten aufeinander zu laufen.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, wie man diese Eigenschaft von Geodäten der Kugeloberfläche mithilfe eines Sektormodells gewinnen kann. Eine Kugelkalotte wird durch eine Facettenfläche angenähert (Abb. 3(a)); die Facetten werden als Sektormodell ausgelegt (Abb. 3(b)). Nun soll eine Geodäte quer durch das Sektormodell gezeichnet werden. Innerhalb eines Sektors, der ja eben ist, ist die Geodäte eine gerade Linie. Wenn die Linie den Rand eines Sektors erreicht, wird sie in den Nachbarsektor fortgesetzt. Wie das zu geschehen hat, folgt aus der Definition der Geodäte: lokal gerade (Abb. 4). Die

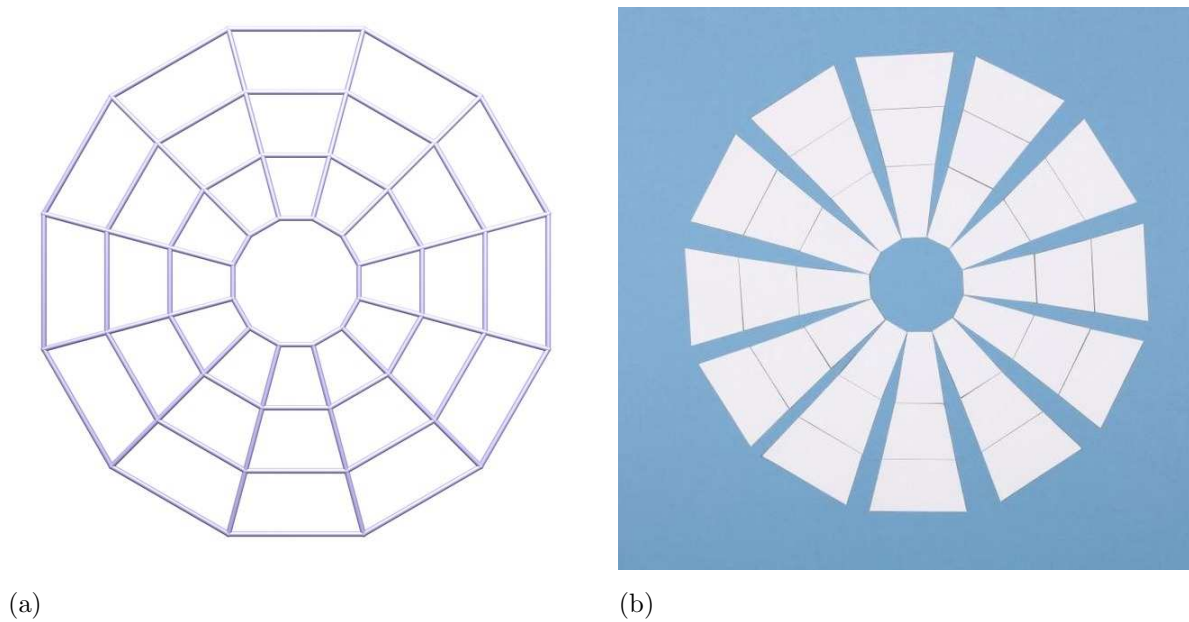


Abbildung 7. Ein Gedankenexperiment zum Sektormodell für die Äquatorfläche eines Schwarzen Lochs: Um das Schwarze Loch wird ein Gittergerüst nach dem in (a) gezeigten Schema errichtet. Für jede Zelle werden die Längen der sie umschließenden vier Stäbe abgemessen; aus diesen Daten werden maßstabsgerechte Sektoren aus Papier konstruiert. Es resultiert das Sektormodell des Rings um das Schwarze Loch (b).

beiden benachbarten Sektoren werden an ihrer gemeinsamen Kante zusammengelegt und die Linie wird über die Sektorgrenze hinweg geradlinig fortgesetzt. Auf diese Weise wird die Geodäte quer durch das Sektormodell gezeichnet (Abb. 5(a)). Es wird dann eine zweite Geodäte hinzugefügt, die im linken unteren Sektor parallel zur ersten verläuft (Abb. 5(b)). Man erkennt, dass sich die beiden parallel startenden Geodäten annähern (Abb. 5(b), (c)).

Als zweites Beispiel dient eine Sattelfläche. Aufgeklebte Klebestreifen zeigen, dass parallel startende Geodäten sich voneinander entfernen (Abb. 6(a)). Die Annäherung eines Ausschnitts der Fläche durch eine Facettenfläche (Abb. 6(b)) führt zu einem Sektormodell (Abb. 6(c)). Es werden zwei Geodäten eingezeichnet, die in der linken unteren Ecke des Modells parallel verlaufen; diese entfernen sich voneinander (Abb. 6(d)).

An den beiden Beispielen wird deutlich, dass die Sektormodelle gekrümmter Flächen dazu geeignet sind, die Eigenschaften von Geodäten auf den Flächen zu untersuchen.

2.2. Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs

Im zweiten Teil des Workshops wird zunächst ein Sektormodell vorgestellt, das es erlaubt Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs zu konstruieren. Das Sektormodell stellt eine Symmetrieebene des Schwarzen Lochs dar; diese wird im Folgenden als

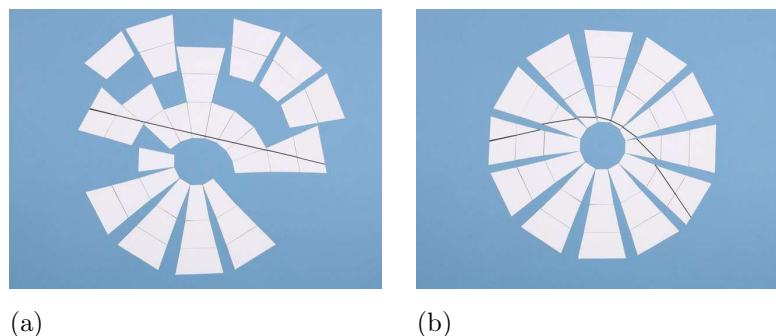


Abbildung 8. Eine Geodäte auf dem Sektormodell der Äquatorfläche eines Schwarzen Lochs. Die Linie ist lokal gerade; die beiden Enden zeigen in unterschiedliche Richtungen. Die Sektoren sind in (a) längs der Geodäte aneinandergelagert und in (b) symmetrisch angeordnet.

Äquatorebene bezeichnet.‡

Das Sektormodell wird eingeführt, indem im Gedankenexperiment seine „Entstehung“ beschrieben wird: Ein Raumschiff wird in die Nähe eines Schwarzen Lochs geschickt, um die Geometrie des Raums zu vermessen. Dazu wird um das Schwarze Loch nach dem in Abb. 7(a) dargestellten Schema ein Gittergerüst errichtet. In Art eines Radnetzes, das auf das Schwarze Loch zentriert ist, werden starre Stäbe in der Äquatorebene des Schwarzen Lochs angeordnet. Das ganze Gerüst befindet sich außerhalb des Ereignishorizonts, da im Inneren des Schwarzen Lochs eine solche statische Struktur nicht möglich ist.§ Das Gittergerüst wird vermessen: Jede einzelne Gitterzelle ist von vier Stäben umschlossen. Deren Längen werden bestimmt und zur Erde übermittelt. Dort wird die Gitterzelle verkleinert als Sektor dargestellt. Alle Sektoren zusammen bilden das maßstabsgetreue Modell eines Rings um das Schwarze Loch (Abb. 7(b)). Sie lassen sich allerdings nicht lückenlos zu einem Ring zusammenschieben. Dies zeigt an, dass die Äquatorebene des Schwarzen Lochs eine andere Geometrie hat als die ebene Fläche, auf der die Sektoren ausgelegt sind. Die Äquatorebene des Schwarzen Lochs ist Teil eines gekrümmten Raums; die Unterlage des Modells ist eine Ebene im euklidischen Raum. Könnte man ein Schwarzes Loch der passenden Größe in die Mitte des Modells setzen, dann würden die Flächenstücke *so wie sie sind* lückenlos zusammenpassen. Für die online verfügbare Vorlage (Zahn und Kraus 2018) hat das zu dem Modell passende Schwarze Loch ungefähr die dreifache Erdmasse.

Alternativ kann das Sektormodell mit dem Workshop über gekrümmte Räume aus Teil I eingeführt werden. Dort wird ein Sektormodell des dreidimensionalen gekrümmten Raums um ein Schwarzes Loch vorgestellt (Abb. 5(b) in Teil I), dessen Äquatorfläche genau das in Abb. 7(b) gezeigte Modell ist (in Abb. 5(b) von Teil I: die grünen, annähernd horizontal ausgerichteten Seiten der Klötzchen).

‡ Wir betrachten ein nichtrotierendes Schwarzes Loch. Es ist kugelsymmetrisch, weshalb jede Geodäte in einer Ebene verläuft, die eine Symmetrieebene des Schwarzen Lochs darstellt.

§ Das Gitter überdeckt den Bereich von 1,25 bis 5 Schwarzschildradien in der Schwarzschildschen Radialkoordinate, s. Abschnitt 2.4.2.

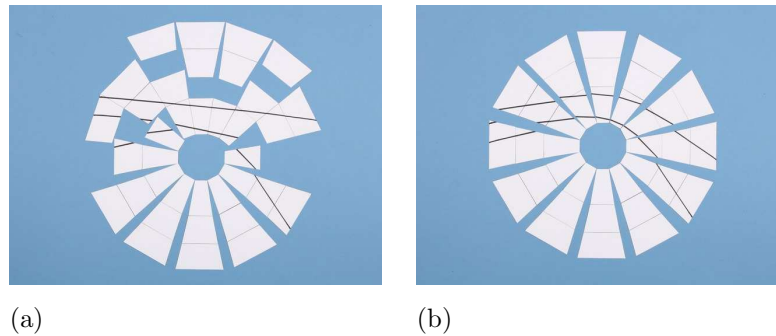


Abbildung 9. Zu der in Abb. 8 gezeigten Geodäte wird eine zweite hinzugefügt, die links außen parallel zur ersten verläuft: Die innere Geodäte wird stärker abgelenkt; die beiden Geodäten laufen auseinander. Die Segmente sind in (a) längs der zweiten Geodäte aneinandergelagert und in (b) symmetrisch angeordnet.

Das Sektormodell von Abb. 7(b) wird für den Workshop vorbereitet, indem die Sektoren aus Papier ausgeschnitten und mit Sprühkleber (Kleber für wiederlösbare und wiederverklebbare Verbindungen) auf Karton fixiert werden^{||}. Dann wird das Sektormodell dazu verwendet, Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs zu untersuchen. Zunächst wird eine einzelne Geodäte quer durch das Sektormodell gezeichnet. Wie oben am Beispiel gekrümmter Flächen beschrieben, geschieht dies durch Aneinanderlegen benachbarter Sektoren und Zeichnen einer geraden Linie (Abb 8(a)). Man erkennt, dass die beiden Enden der Linie in unterschiedliche Richtungen zeigen (Abb 8(b)). Eine Linie, die nah an einem Schwarzen Loch vorbeiführt und dabei in jedem Punkt ihre Richtung beibehält, hat also „weit nach“ dem Schwarzen Loch eine andere Richtung als „weit davor“. Die Konstruktion verdeutlicht das Prinzip der Lichtablenkung im Schwerfeld: Licht breitet sich lokal geradlinig aus; wenn es einen Bereich gekrümmter Raumzeit durchquert, ist die Ausbreitungsrichtung hinterher anders als vorher.

Um die Aussagekraft dieser Konstruktion auf dem Sektormodell einzuschätzen, sind zwei Dinge zu bedenken. Zum einen sind die auf Sektormodellen konstruierten Geodäten quantitativ richtig. Wenn man die Bedingung des lokal geraden Verlaufs mathematisch formuliert, erhält man die Geodätengleichung (Weinberg 1972, S. 70 ff). Die konstruierte Geodäte ist eine Lösung dieser Gleichung. Da das Sektormodell den gekrümmten Raum näherungsweise darstellt, ist auch die gezeichnete Geodäte eine Näherungslösung. Durch eine entsprechend feine Unterteilung können Geodäten aber prinzipiell auch mit hoher Genauigkeit konstruiert werden (s. Abschnitt 3). Zum anderen muss bedacht werden, dass die konstruierte Linie zwar eine Geodäte ist, aber dennoch keinen Lichtstrahl darstellt. Die gezeichnete Geodäte ist rein räumlich. Licht breitet sich in Raum und Zeit aus, was bedeutet, dass Lichtwege raumzeitliche Geodäten sind. Die rein räumliche Geodäte illustriert also im Sinne einer Analogie, wie Lichtablenkung prinzipiell zustandekommt.

^{||} S. Abschnitt 2.3 für ein Verfahren, das ohne Aufkleben von Sektoren auskommt.

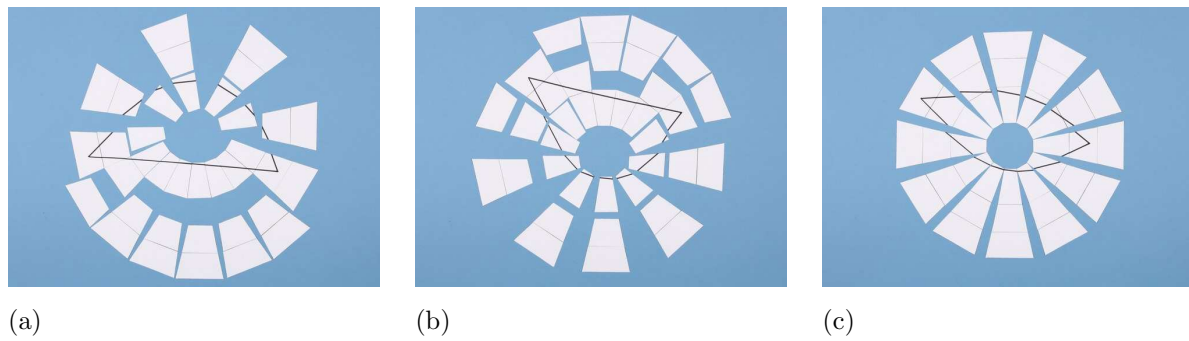


Abbildung 10. Zwei Geodäten bilden ein Zweieck. Dies illustriert die Entstehung von Doppelbildern durch Lichtablenkung: Licht einer Quelle erreicht den Beobachter auf zwei verschiedenen Wegen. Die Sektoren sind in (a) und (b) jeweils längs einer der Geodäten aneinandergelagert und in (c) symmetrisch angeordnet.

Auch wenn räumliche Geodäten nicht identisch mit Lichtstrahlen sind, ist es instruktiv, an ihnen Eigenschaften von Geodäten aufzuzeigen. So kann man eine zweite Geodäte konstruieren, die in der Nähe der ersten und parallel zu ihr beginnt (Abb. 9). Diejenige der beiden Geodäten, die dem Schwarzen Loch näher kommt, wird stärker abgelenkt; die beiden Geodäten laufen auseinander. Schließlich kann man zwei Geodäten konstruieren, die vom selben Punkt ausgehend auf verschiedenen Seiten am Schwarzen Loch vorbeiführen und sich wieder treffen (Abb. 10). Man kann also aus Geodäten ein Zweieck bilden. Übertragen auf Lichtstrahlen zeigt diese Konstruktion, wie Doppelbilder zustandekommen.

2.3. Konstruktion von Geodäten mit Transfersektoren

Für die Abbildungen 8, 9 und 10 wurden die Sektoren ausgeschnitten und nach Bedarf längs einer Geodäte oder aber in symmetrischer Anordnung ausgelegt. Das hat den Vorteil, dass man jede Geodäte für sich als gerade Linie zeigen kann. Die Konstruktion der Geodäten kann man aber einfacher und schneller durchführen, wenn man auf das Ausschneiden der Sektoren verzichtet. Dazu wird die in Abb. 11(a) gezeigte Vorlage mit symmetrischer Anordnung und Randmarkierungen verwendet. Ausgeschnitten wird nur eine einzelne zusätzliche Spalte (Abb. 11(b)); dies sind die sogenannten Transfersektoren. Man beginnt nun mit dem Zeichnen einer Geodäte auf der symmetrischen Vorlage, bis man an den Rand einer Spalte gelangt (Abb. 12(a)). Dann wird die Transferspalte so positioniert, dass an der Kante mit dem Durchstoßpunkt der passende Transfersektor anliegt, und die Linie wird geradlinig über die Spalte der Transfersektoren fortgesetzt (Abb. 12(b)). Von den Transfersektoren wird die Linie auf die Nachbarspalte der Vorlage übertragen (Abb. 12(c)). Dieses Verfahren wird bis zum gewünschten Endpunkt fortgesetzt. In dem in Abb. 11(a) gezeigten Sektormodell sind die Ränder der Sektoren mit äquidistanten Markierungen versehen, die das Übertragen der Geradenstücke erleichtern. Die in Abb. 11 gezeigte Vorlage ist online verfügbar (Zahn und Kraus 2018).

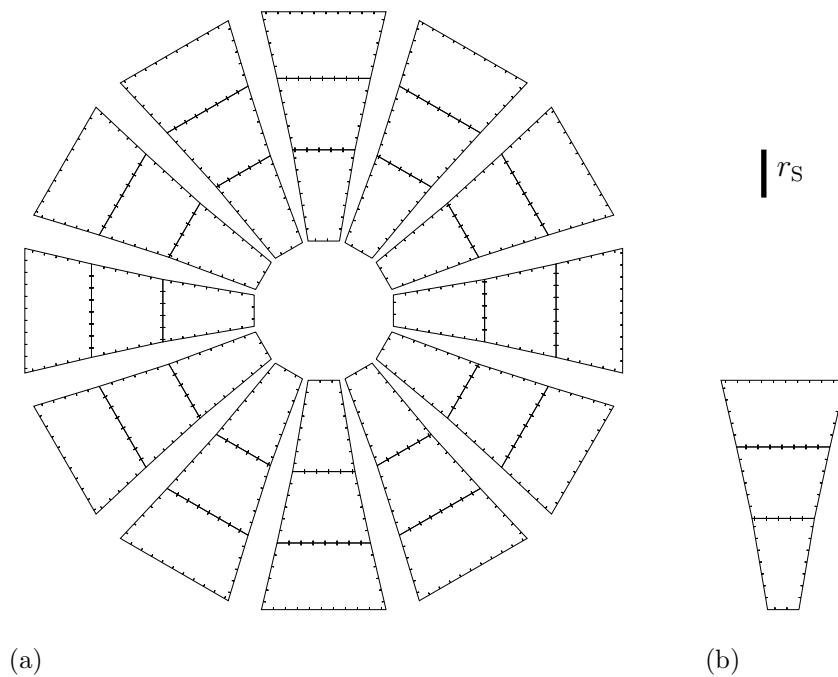


Abbildung 11. Vorlage für die Konstruktion von Geodäten in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Die Vorlage besteht aus dem Sektormodell der Äquatorfläche als symmetrisch ausgelegtem Gesamtmodell mit Randmarkierungen (a) und einer Spalte von Transfersektoren (b). Der Schwarzschildradius r_S des Schwarzen Lochs ist als Balken markiert.

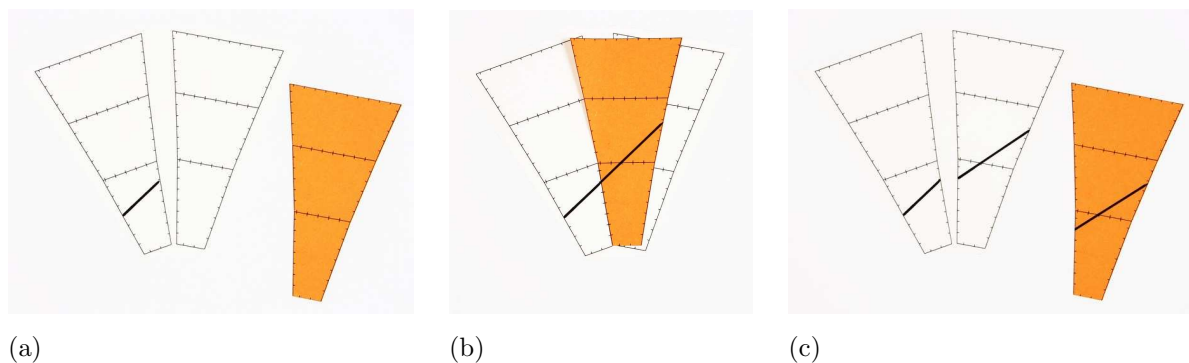


Abbildung 12. Konstruktion von Geodäten mit Transfersektoren (farbig markiert). Die Geodäte wird bis zum Rand der Spalte gezeichnet (a), nach Anlegen des passenden Transfersektors auf der Transferspalte fortgesetzt (b) und von dort auf die Nachbarspalte übertragen (c).

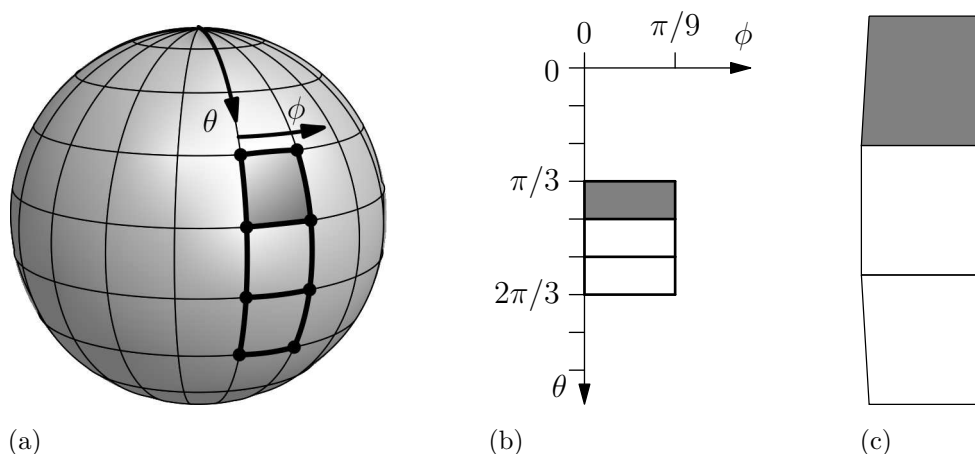


Abbildung 13. (a) Die Oberfläche einer Kugel wird mit Polarkoordinaten θ , ϕ beschrieben und in Flächenstücke mit Winkelausdehnung 20 Grad auf 20 Grad unterteilt. (b) Drei Flächenstücke im ϕ - θ -Koordinatenraum. (c) Die zugehörigen Sektoren. Sie bilden eine Spalte des in Abb. 3(b) gezeigten Modells. Zur leichteren Zuordnung ist in allen drei Teilbildern ein und derselbe Sektor grau markiert.

2.4. Erstellung von Sektormodellen

Ein Workshop kann wie oben beschrieben mit vorgegebenen Sektormodellen durchgeführt werden. Dies ist die einfachste und die kürzeste Variante. Ihr volles Potenzial als Werkzeug zur Untersuchung gekrümmter Räume entfalten Sektormodelle aber dann, wenn sie von den Teilnehmer/innen selbst berechnet und konstruiert werden. Dies versetzt die Teilnehmer/innen in die Lage, andere gekrümmte Räume selbstständig auf die gleiche Weise zu untersuchen und beispielsweise zu einer gegebenen Metrik Geodäten zu bestimmen. Dabei werden Aufstellen und Lösen der Geodätengleichung ersetzt durch Erstellung des Sektormodells und zeichnerische Geodätenkonstruktion.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie man am Beispiel der Kugeloberfläche die Berechnung von Sektormodellen einführen kann. Das Vorgehen wird anschließend auf die Berechnung des Sektormodells der Äquatorfläche angewandt.

2.4.1. Erstellung des Sektormodells einer Kugeloberfläche. An diesem Beispiel wird das prinzipielle Vorgehen bei der Erstellung von Sektormodellen eingeführt. Voraussetzung ist der Begriff der Metrik als einer Funktion, die den Koordinaten zweier nahe benachbarter Punkte den Abstand dieser Punkte zuordnet. Die Metrik kann ausgehend von krummlinigen Koordinaten auf elementare Weise eingeführt werden (z. B. Kraus und Zahn 2016; Hartle 2003, S. 21 f; Natário 2011, S. 35 f).

Ausgangspunkt der Berechnung ist die Metrik der Kugeloberfläche in den üblichen Polarkoordinaten θ , ϕ (Abb. 13(a)):

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

wobei R der Radius der Kugel ist (für eine elementare Herleitung, die im Workshop genutzt werden kann, siehe z. B. Hartle 2003, S. 23 f; Natário 2011, S. 37 ff).

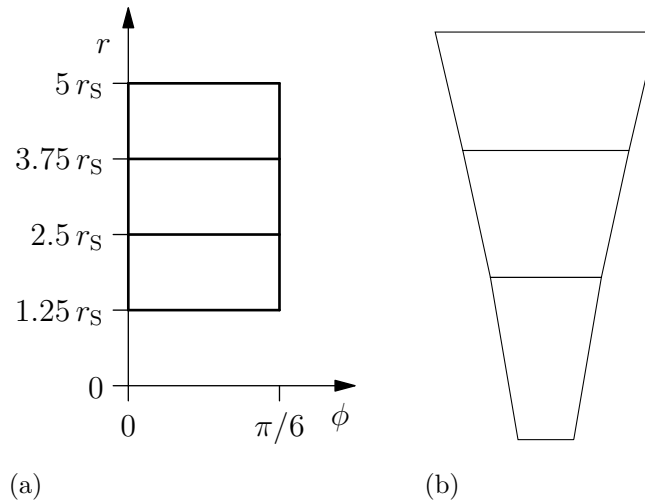


Abbildung 14. Zur Erstellung des Sektormodells der Äquatorfläche eines Schwarzen Lochs. (a) Die drei Flächenstücke einer Spalte im ϕ - r -Koordinatenraum. (b) Die zugehörigen Sektoren.

Die Erstellung des Sektormodells erfolgt in drei Schritten. Im ersten Schritt wird die Kugeloberfläche in Flächenstücke unterteilt, die durch ihre Eckpunkte definiert sind. In dem hier betrachteten Beispiel sind die Flächenstücke Vierecke, deren Eckpunkte in den Winkelkoordinaten θ und ϕ jeweils Abstände von 20 Grad ($\pi/9$) haben (Abb. 13(a), (b)). Im zweiten Schritt werden die Kantenlängen der Flächenstücke berechnet. Dies geschieht näherungsweise, um die Berechnung einfach zu halten. Für jede Kante wird der Abstand zwischen den beiden Endpunkten bestimmt, indem man die Endpunkte als nahe benachbarte Punkte im Sinne der Definition der Metrik behandelt. Man erhält für die Kanten zwischen zwei Punkten auf demselben Längengreis die Länge

$$\Delta s = R \Delta \theta \quad (\Delta \phi = 0), \quad (2)$$

im konkreten Beispiel $\Delta s = R\pi/9$. Für die Kanten zwischen zwei Punkten auf demselben Breitenkreis erhält man

$$\Delta s = R \sin \theta \Delta \phi \quad (\Delta \theta = 0), \quad (3)$$

abhängig vom Winkel θ des Breitenkreises. Für die Sektormodelle in den Abbildungen und Online-Ressourcen werden die Kantenlängen als Längen der Geodäten zwischen den Eckpunkten berechnet (s. Teil I). Der Unterschied zwischen den genäherten und den exakten Kantenlängen beträgt bei diesem Beispiel maximal 0,13%.

Im dritten Schritt werden aus den Kantenlängen ebene Flächenstücke konstruiert. In dem hier betrachteten Beispiel haben die Flächenstücke auf der Kugel Spiegelsymmetrie; die ebenen Flächenstücke werden mit der gleichen Symmetrieeigenschaft als symmetrische Trapeze konstruiert (Abb. 13(c)).

2.4.2. *Erstellung des Sektormodells der Äquatorfläche eines Schwarzen Lochs.* Ausgangspunkt der Berechnung ist die Metrik der Äquatorebene eines Schwarzen Lochs

$$ds^2 = \frac{1}{1 - r_S/r} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (4)$$

in den üblichen Schwarzschildkoordinaten r und ϕ . Hier ist $r_S = 2GM/c^2$ der Schwarzschildradius des Schwarzen Lochs mit Masse M , G die Newtonsche Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Das Sektormodell stellt einen ringförmigen Ausschnitt der Äquatorebene dar. Der Innenrand liegt bei $r = 1,25 r_S$, der Außenrand bei $r = 5 r_S$. Der Azimutwinkel ϕ nimmt Werte zwischen null und 2π an.

Zunächst wird der Ring in Flächenstücke unterteilt. Dazu wird der ϕ -Bereich in 12 Abschnitte von je $\pi/6$ aufgeteilt. Da die Metrik nicht von der Koordinate ϕ abhängt, braucht nur einer der 12 Abschnitte berechnet zu werden; man erhält 12 identische Spalten, die im Kreis angeordnet werden. Der r -Bereich wird in drei Abschnitte der Koordinatenlänge $1,25 r_S$ eingeteilt (Abb. 14(a)). Im zweiten Schritt werden die Kantenlängen der drei in Abb. 14(a) gezeigten Vierecke berechnet. Für den Abstand von Eckpunkten mit gleicher r -Koordinate erhält man mithilfe der Metrik

$$\Delta s = r \Delta\phi \quad (\Delta r = 0). \quad (5)$$

Bei der Abstandsberechnung von Eckpunkten mit gleicher ϕ -Koordinate kommt der erste Term der Metrik zum Tragen. Er enthält den Metrikkoeffizienten $1/(1 - r_S/r)$, der von r abhängt, sich also längs der Kante ändert. Hier machen wir eine weitere Näherung und verwenden den Metrikkoeffizienten an der mittleren r -Koordinate r_m der Kante:

$$\Delta s = \sqrt{\frac{1}{(1 - r_S/r_m)}} \Delta r \quad (\Delta\phi = 0), \quad (6)$$

wobei $r_m = (r_1 + r_2)/2$ mit den Koordinaten r_1 und r_2 der zugehörigen Eckpunkte. Für die Abbildungen und Online-Ressourcen werden die Kantenlängen als Längen der Geodäten zwischen den Eckpunkten numerisch berechnet. Die Abweichung der vereinfacht berechneten Kantenlängen ist am größten für die innerste radiale Kante und beträgt hier 5,4%.

Im dritten Schritt werden die Vierecke konstruiert. Die Aufteilung des Rings durch radiale Schnitte erzeugt Flächenelemente mit Spiegelsymmetrie (Abb. 7(a)); dieser Symmetrie entsprechend werden die Flächenstücke als symmetrische Trapeze konstruiert. Abb. 14 stellt die drei Sektoren einer Spalte den zugehörigen Vierecken im ϕ - r -Koordinatenraum gegenüber. Das vollständige Sektormodell mit zwölf Spalten ist in Abb. 11 dargestellt.

2.5. Geodäten vs. Krümmung

Den Zusammenhang zwischen der Krümmung einer Fläche und dem Verlauf von Geodäten kann man zum Thema machen, wenn man zusätzlich zu dem oben geschilderten Workshop über Geodäten auch den in Teil I (Abschnitt 2) beschriebenen Workshop über Krümmung durchführt. In Teil I werden die Kugeloberfläche und

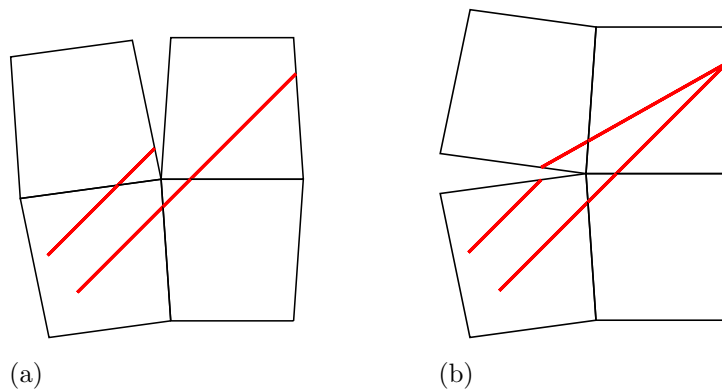


Abbildung 15. Zwei zunächst parallele Geodäten (a) führen auf verschiedenen Seiten an einem Vertex vorbei und sind anschließend um den Defizitwinkel zueinander geneigt (b).

die Sattelfläche als Prototypen für Flächen mit positiver bzw. negativer Krümmung vorgestellt. Es wird verdeutlicht, dass der Defizitwinkel im Sektormodell ein Kriterium für die Krümmung ist: Positive Krümmung wird durch einen positiven Defizitwinkel angezeigt und vice versa. ¶

Anhand von Sektormodellen kann man aufzeigen, dass der Verlauf benachbarter Geodäten ebenfalls ein Kriterium für die Krümmung darstellt. Abb. 15 stellt den Verlauf von benachbarten Geodäten in der Nähe eines einzelnen Vertex mit positivem Defizitwinkel dar. Zwei Geodäten, die vor dem Vertex parallel verlaufen und auf verschiedenen Seiten an dem Vertex vorbeiführen (Abb. 15(a)), laufen nach dem Vertex aufeinander zu (Abb. 15(b)). Der Winkel, den die beiden Richtungen nach dem Vertex einschließen, ist nach Konstruktion der Defizitwinkel.

Parallel startende Geodäten zeigen also positive Krümmung an, wenn sie aufeinander zu laufen. Umgekehrt zeigen sie negative Krümmung an, wenn sie auseinander laufen. Zwei Beispiele für dieses Kriterium gibt Abschnitt 2.1 mit Geodäten auf der Kugeloberfläche (Abb. 5(c)) und der Sattelfläche (Abb. 6(d)). Angewandt auf die Äquatorebene eines Schwarzen Lochs schließt man aus dem Auseinanderlaufen von parallel startenden Geodäten (Abb. 9) auf eine negative Krümmung. (Man beachte, dass die hier betrachtete Krümmung die Flächenkrümmung der Äquatorebene ist. Eine vollständige Beschreibung der Krümmung des dreidimensionalen Raums um ein Schwarzes Loch beinhaltet mehrere Krümmungskomponenten; dies wird in Teil I näher erläutert.)

Die obige Überlegung ist eine Veranschaulichung für die Gleichung der geodätischen Abweichung

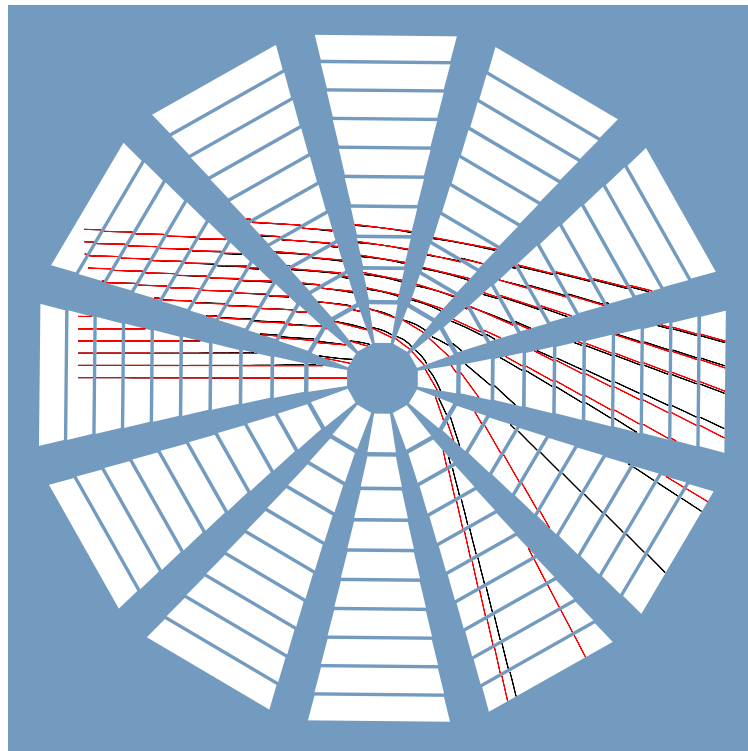
$$(\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{D})^i = -R^i{}_{jkl} u^j D^k u^l \quad (7)$$

¶ Der Defizitwinkel ist positiv, wenn nach Zusammenschieben aller an einen Eckpunkt angrenzenden Sektoren eine keilförmige Lücke verbleibt (ein Beispiel gibt Abb. 15). Er ist negativ, wenn nach Zusammenschieben aller an einen Eckpunkt angrenzenden Sektoren bis auf einen die verbleibende Lücke zu klein ist für den letzten Sektor.

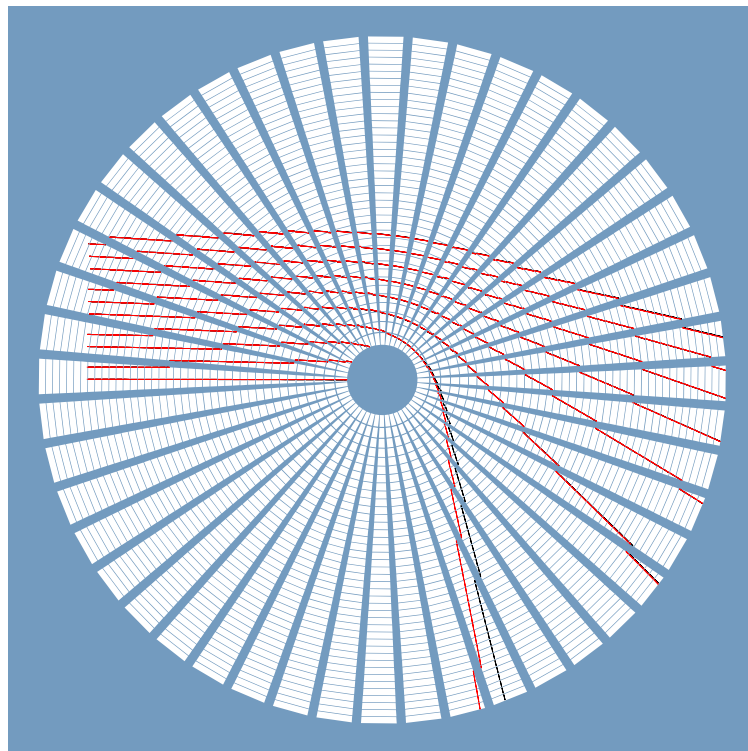
für zwei Geodäten $x^i(\lambda)$ und $x^i(\lambda) + D^i(\lambda)$ mit $u^i = dx^i/d\lambda$ und dem Riemannschen Krümmungstensor $R^i{}_{jkl}$. Im Sektormodell werden die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors durch die Defizitwinkel dargestellt (Teil I, Abschnitt 3) und Abb. 15 zeigt bildlich, wie diese sich auf die Änderung des Abstands benachbarter Geodäten auswirken.

3. Die Genauigkeit von Geodäten auf Sektormodellen

Im Regge-Kalkül werden Geodäten als Geradenstücke in den ungekrümmten Sektoren beschrieben (Williams und Ellis 1981, 1984, Brewin 1993). Diese Darstellung wird auf den Sektormodellen zeichnerisch umgesetzt. Die so konstruierten Geodäten sind also grundsätzlich quantitativ korrekt. Ihre Genauigkeit hängt allerdings von der Auflösung der Sektormodelle ab. Für die Workshops wird die Auflösung bewusst grob gewählt, damit die Modelle gut handhabbar sind. In diesem Abschnitt wird durch den Vergleich mit numerisch berechneten Geodäten untersucht, welche Genauigkeit mit der zeichnerischen Methode erreicht wird. Für den Vergleich werden zwei Sektormodelle der Äquatorebene eines Schwarzen Lochs verwendet, die beide den Bereich zwischen $r = 1,25 r_S$ und $r = 13,75 r_S$ überdecken. Das erste hat die Auflösung des im Workshop verwendeten Sektormodells ($\Delta r = 1,25 r_S$, $\Delta\phi = \pi/6$); es besteht aus 10 Ringen zu je 12 Sektoren (Abb. 16(a)). Das zweite hat in jeder Koordinatenrichtung die vierfache Auflösung ($\Delta r = 0,3125 r_S$, $\Delta\phi = \pi/24$) und besteht somit aus 40 Ringen zu je 48 Sektoren (Abb. 16(b)). In Abb. 16 sind die im Regge-Kalkül bestimmten Geodäten und die numerischen Lösungen der Geodätengleichung im Vergleich dargestellt. Dazu werden die berechneten Bahnen auf dem Sektormodell dargestellt. Die Abbildung der in Schwarzschildkoordinaten gegebenen Bahnpunkte auf Punkte im Sektormodell erfolgt durch Interpolation (Hormann 2005). Für einen quantitativen Vergleich wurde auf denselben beiden Sektormodellen der Ablenkwinkel als Funktion des Stoßparameters bestimmt und mit den aus der Geodätengleichung durch Integration bestimmten Werten verglichen (Abb. 17). Auf den Sektormodellen wurden dabei für jeden Stoßparameter zehn Geodäten konstruiert, die in ϕ -Richtung gegeneinander verdreht sind, so dass sie unterschiedliche Lagen bzgl. der Sektorgrenzen haben. Man erkennt, dass für die gröbere Diskretisierung die Übereinstimmung von Geodäten mit geringer Ablenkung gut ist, dass bei Geodäten mit starker Ablenkung aber erhebliche Abweichungen auftreten können (Abb. 16(a), 17(a)). Für das Sektormodell mit der höheren Auflösung ist die Übereinstimmung generell gut (Abb. 16(b), 17(b)). Abb. 17(a) zeigt, dass die unterschiedlichen Lagen bzgl. der Sektorgrenzen eine erhebliche Streuung in den Abweichungen von einer integrierten Geodäte mit gegebenem Stoßparameter bewirken, insbesondere für große Ablenkwinkel. Diese Streuung zeigt sich auch in Abb. 16(a) an den unterschiedlichen Abweichungen bei den drei innersten Geodäten. For the higher resolution sector model, the agreement is generally good (figures 16(b), 17(b)). Die Genauigkeit auf dem im Workshop eingesetzten Sektormodell ist für qualitative Betrachtungen völlig zufriedenstellend.



(a)



(b)

Abbildung 16. Auf Sektormodellen konstruierte Geodäten (rote Linien) im Vergleich mit numerischen Lösungen der Geodätengleichung (schwarze Linien). (a) Sektormodell mit der im Workshop verwendeten Auflösung. (b) Sektormodell mit der vierfachen Auflösung in jeder Koordinatenrichtung.

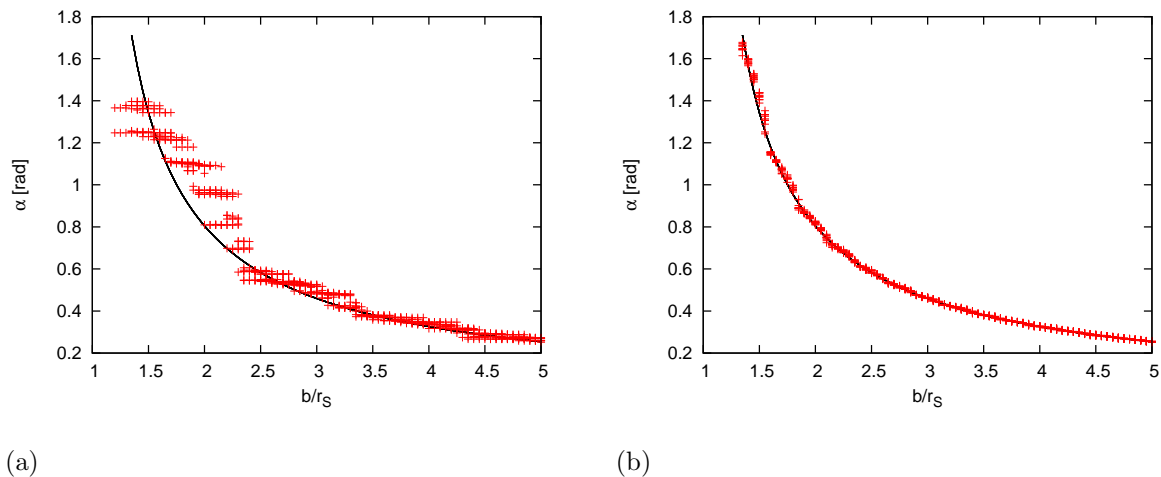


Abbildung 17. Zusammenhang zwischen dem Ablenkwinkel α und dem Stoßparameter b einer Geodäte, berechnet durch Konstruktion der Geodäten auf einem Sektormodell (Kreuze) sowie durch Integration der Geodätengleichung (Linie). (a) Sektormodell mit der im Workshop verwendeten Auflösung. (b) Sektormodell mit der vierfachen Auflösung in jeder Koordinatenrichtung.

4. Fazit und Ausblick

4.1. Zusammenfassung und didaktische Anmerkungen

Wir haben gezeigt, auf welche Weise man Sektormodelle als Werkzeuge zur Bestimmung von Geodäten einsetzen kann. Dies vermittelt einerseits ein anschauliches Verständnis und ermöglicht andererseits die Ermittlung von Geodäten mit zeichnerischen Mitteln. Veranschaulicht wird zunächst der Begriff der Geodäte als einer lokal geraden Linie, indem diese Definition auf einem Sektormodell mit dem Lineal unmittelbar umgesetzt wird (Abschnitt 2.1). Weiter wird anschaulich klar, dass eine Geodäte nach dem Durchqueren eines Bereichs gekrümmten Raums eine andere Richtung hat als zuvor (Abschnitt 2.2), wodurch das Zustandekommen der Lichtablenkung im Schwerfeld verdeutlicht wird. Da die konstruierten Geodäten Lösungen der Geodätengleichung darstellen, erhält man quantitativ richtige Ergebnisse. Deren Genauigkeit ist wegen der relativ groben Auflösung der von Hand erstellten und eingesetzten Sektormodelle nicht hoch. Aus didaktischer Sicht ist eine grobe Auflösung jedoch vorteilhaft. Die Defizitwinkel sind dann so groß, dass die Auswirkungen der Krümmung an einzelnen Vertizes verdeutlicht werden können. So entsteht ein klares Bild von dem Zusammenhang zwischen der Krümmung und dem Verlauf benachbarter Geodäten (Abschnitt 2.5). In diesem Beitrag werden nur raumartige Geodäten betrachtet. Eine Erweiterung auf Geodäten in der Raumzeit wird in einem Folgebeitrag beschrieben (Kraus und Zahn 2018).

Der in diesem Beitrag vorgestellte Workshop zu Geodäten und Lichtablenkung entstand in einem Wechselspiel zwischen Erprobung und Weiterentwicklung. Tests wurden vorwiegend mit Schulklassen der Oberstufe sowie mit Lehramtsstudierenden

durchgeführt.

Für das vorgestellte Material gibt es, je nach Ziel und Zeitbudget, verschiedene Einsatzmöglichkeiten. Wenn das Ziel ein kurzer und direkter Zugang zur gravitativen Lichtablenkung ist, beispielsweise für einen Astronomiekurs, kann der vorgestellte Workshop wie in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 beschrieben mit fertigen Vorlagen der Sektormodelle durchgeführt werden. Vorkenntnisse zum Begriff der Metrik sind dann nicht erforderlich; die zeichnerische Konstruktion ist einfach durchzuführen und vermittelt ein fachlich befriedigendes Konzept von Lichtbahnen als Geodäten. Ist eine Einführung in die Grundkonzepte der Allgemeinen Relativitätstheorie das Ziel, dann kann man die Sektormodelle der Kugeloberfläche und der Äquatorebene des Schwarzen Lochs von den Teilnehmer/innen selbst berechnen lassen. Der Kurs vermittelt dann die Fähigkeit, anhand einer vorgegebenen Metrik die Geometrie einer Fläche zu untersuchen. Dabei werden Aufgaben zeichnerisch gelöst, die in einem Standardkurs rechnerisch bearbeitet würden. Da Sektormodelle und die zeichnerische Konstruktion von Geodäten auf direkte Weise der mathematischen Beschreibung durch die Metrik und die Geodätengleichung entsprechen, kann dieses Material auch als Ergänzung zu einer üblichen, mathematisch ausgerichteten Vorlesung eingesetzt werden, um die geometrische Anschauung zu stärken.

4.2. Vergleich mit anderen anschaulichen Zugängen

Im Vergleich mit anderen bildlichen Darstellungen von Geodäten zeichnen sich Konstruktionen auf Sektormodellen dadurch aus, dass sie den lokal geraden Verlauf deutlich zum Ausdruck bringen und dass sie einfach zu erstellen sind.

Zur Erklärung der durch Lichtablenkung bewirkten optischen Phänomene, z. B. der Doppelbilder, werden üblicherweise Grafiken eingesetzt, die Lichtwege als gebogene Linien darstellen. In diesem Zusammenhang werden Lichtwege auch häufig als „krumm“ bezeichnet. Dass Lichtwege Geodäten, also (lokal) gerade Linien sind, kommt in diesen Grafiken und auch in der sprachlichen Beschreibung nicht zum Ausdruck, was zu Fehlvorstellungen führen kann. Die Konstruktion auf den Sektormodellen verdeutlicht, dass der lokal gerade Verlauf der Geodäte und das Auftreten von Lichtablenkung nicht im Widerspruch stehen (Abb. 8). Es kann auch der Bezug zu den gekrümmt dargestellten Lichtwegen hergestellt werden: Auf einer Weltkarte ist die Erdoberfläche auf eine Ebene projiziert und Geodäten der Erdkugel erscheinen als gekrümmte Linien. Dies sind Verzerrungen, die der Projektion geschuldet sind. Analog werden in einer Projektion, die das Sektormodell aus Abb. 8 auf einen ebenen Kreisring abbildet, Verzerrungen auftreten, welche die Geodäten der Äquatorebene des Schwarzen Lochs als gekrümmte Linien erscheinen lassen.

Eine häufig verwendete bildliche Darstellung zeigt Geodäten auf der Einbettungsfläche der Äquatorebene eines Sterns oder eines Schwarzen Lochs mit dem Ziel, die Lichtablenkung zu veranschaulichen (d’Inverno 1992, S. 209). Dies ist äquivalent zu den in Abschnitt 2.2 konstruierten Geodäten. Wenn man beim dortigen Sektormodell die

Sektoren an den gemeinsamen Kanten zusammenfügt, erhält man eine Facettenfläche, welche näherungsweise die Einbettungsfläche darstellt. Für die Geodäten auf der Einbettungsfläche gilt derselbe Vorbehalt wie für die Geodäten auf dem Sektormodell: Der dargestellte Unterraum ist rein räumlich, so dass die gravitative Lichtablenkung in Form einer Analogie mit raumartigen Geodäten illustriert wird. Unsere Erfahrung zeigt, dass das Konzept der Einbettungsfläche für die Zielgruppe dieser Workshops schwierig ist. Man muss damit rechnen, dass die Darstellung als geometrische Form des Schwarzen Lochs fehlinterpretiert wird (Zahn und Kraus 2010). Im Vergleich zu Einbettungsflächen haben Sektormodelle den Vorteil, dass ihre Berechnung einfacher ist, insbesondere wenn das in Abschnitt 2.4 beschriebene vereinfachte Verfahren angewandt wird. Sie lassen sich außerdem auf einfache Weise als Anschauungsmodelle aus Papier erstellen und gut vervielfältigen, so dass alle Teilnehmer/innen eines Workshops die Konstruktion von Geodäten auf eigenen Vorlagen selbst durchführen können.

Eine Beschreibung von Geodäten, die mit der Darstellung auf Sektormodellen verwandt ist, ist die von diSessa (1981) entwickelte Konstruktion auf sogenannten Keilkarten (wedge maps). Eine Keilkarte entsteht, wenn die Symmetrieebene einer sphärisch-symmetrischen Raumzeit durch radiale Schnitte in Streifen zerlegt wird; diese Streifen werden als ungekrümmt angesehen. Auf den Streifen werden Geodäten nach dem Prinzip des Regge-Kalküls auf numerische Weise bestimmt. Die Konstruktion der Geodäten auf der Keilkarte folgt also demselben Prinzip wie hier für die Sektormodelle beschrieben. Das numerische Vorgehen ist anspruchsvoller als die hier eingesetzte zeichnerische Lösung, sowohl was die mathematische Beschreibung angeht als auch wegen der erforderlichen Programmierkenntnisse.

4.3. Ausblick

In Teil I wurden drei Grundfragen aufgeworfen, die bei einer Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie beantwortet werden sollten: Was ist eine gekrümmte Raumzeit? Wie bewegt sich Materie in einer gekrümmten Raumzeit? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Materieverteilung und der Krümmung der Raumzeit? Der Begriff des gekrümmten Raums bzw. der gekrümmten Raumzeit wurde in Teil I verdeutlicht. Zur Beantwortung der zweiten Frage beschreibt der vorliegende Teil II Geodäten im Raum und der Folgebeitrag Geodäten in der Raumzeit (Kraus und Zahn 2018). Ein vierter Teil dieser Serie wird auf den Zusammenhang zwischen der Krümmung der Raumzeit und der Materieverteilung eingehen.

Literatur

- Brewin L 1993 Particle paths in a Schwarzschild spacetime via the Regge calculus *Class. Quantum Grav.* **10** 1803–23
- d’Inverno R 1992 *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford: Clarendon Press)

- diSessa A 1981 An elementary formalism for general relativity *Am. J. Phys.* **49** (5) 401–11
- Hartle J 2003 *Gravity* (San Francisco: Addison Wesley)
- Hormann K 2005 Barycentric Coordinates for Arbitrary Polygons in the Plane, Technical Report No. 5, Institute of Computer Science, Clausthal University of Technology, Germany
- Kraus U und Zahn C 2016 Lichtablenkung für die Schule: Von der Metrik zur Geodäte *Astronomie und Raumfahrt im Unterricht* **53** (3–4/2016) 43–9
Online, mit Begleitmaterial: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/aur16
- Kraus U und Zahn C 2018 Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. III: Geodäten in der Raumzeit, eingereicht
- Natário J 2011 *General Relativity Without Calculus* (Springer)
- Regge T 1961 General relativity without coordinates *Il Nuovo Cimento* **19** 558–71
- Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology* (Wiley)
- Williams R M und Ellis G F R 1981 Regge Calculus and Observations. I. Formalism and Applications to Radial Motion and Circular Orbits *Gen. Rel. Grav.* **13** (4) 361–95
- Williams R M und Ellis G F R 1984 Regge Calculus and Observations. II. Further Applications *Gen. Rel. Grav.* **16** (11) 1003–21
- Zahn C und Kraus U 2010 Workshops zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Schülerlabor „Raumzeitwerkstatt“ an der Universität Hildesheim *PhyDid B* DD 09.03
- Zahn C und Kraus U 2014 Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. I: Gekrümmte Räume und Raumzeiten
www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1
Deutsche Übersetzung von: Sector models—A toolkit for teaching general relativity: I. Curved spaces and spacetimes *Eur. J. Phys.* **35** (5) 055020
(Teil I)
- Zahn C und Kraus U 2018 Online-Ressourcen zum Beitrag,
www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels2