

6. Juli 2014

Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Teil 1: Gekrümmte Räume und Raumzeiten

C Zahn und U Kraus

Institut für Physik, Universität Hildesheim, Marienburger Platz 22, 31141
Hildesheim, Germany

E-mail: corvin.zahn@uni-hildesheim.de, ute.kraus@uni-hildesheim.de

Zusammenfassung.

Für die Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Schule, im Grund- oder im Nebenfachstudium besteht das Anliegen, eine fachlich befriedigende Darstellung zu geben, die nicht mehr als Schulmathematik voraussetzt. Wir stellen in diesem Beitrag einen solchen Zugang vor. Das zentrale Werkzeug unserer Einführung sind sogenannte Sektormodelle, die gekrümmte Räume im Sinne des Regge-Kalküls durch eine Zerlegung in kleine, ungekrümmte Sektoren beschreiben, ähnlich der Triangulierung einer gekrümmten Fläche. Wir schildern einen Workshop für Schüler/innen und Studierende, in dem gekrümmte Räume anhand von Sektormodellen Schwarzer Löcher eingeführt werden. Wir beschreiben ferner die Erweiterung auf Sektormodelle gekrümmter Raumzeiten. Raumzeitliche Sektormodelle setzen Grundkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie voraus. Die vorgestellten Materialien stehen online unter <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de> für den Unterricht zur Verfügung.

1. Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist neben der Quantentheorie eine der beiden großen Weiterentwicklungen der Physik im 20. Jahrhundert. Durch Experimente im Sonnensystem mit hoher Genauigkeit getestet, ist sie eine gut etablierte Theorie. Sie gehört zu den Grundlagen des heutigen physikalischen Weltbildes; von zentraler Bedeutung ist sie für das Verständnis vieler astrophysikalischer Phänomene. Die Relativitätstheorie ist auch von hohem Interesse für die allgemeine Bevölkerung, nicht zuletzt wegen ihrer Bedeutung für das Verständnis exotischer Objekte wie Schwarzer Löcher sowie für Fragen nach Anfang und Ende der Welt.

Die Vermittlung dieser wichtigen und für Studierende und Schüler/innen in der Regel faszinierenden Theorie steht jedoch vor einem grundlegenden Problem. Die Standarddarstellung beginnt mit den benötigten mathematischen Werkzeugen, begründet dann die Einsteinschen Feldgleichungen, leitet Lösungen der Feldgleichungen her und untersucht schließlich deren Eigenschaften, insbesondere die Bahnen von Teilchen und Licht. Die mathematischen Werkzeuge, auf denen dieses Programm aufbaut, sind umfangreich und gehen über Schulmathematik weit hinaus. Für Schüler/innen und Studienanfänger/innen sind die mathematischen Anforderungen also zu hoch. Ebenso im Studium von Physik als Nebenfach oder als einem von zwei Hauptfächern (z. B. Lehramtsstudium), da hier nicht genügend Zeit zur Verfügung steht, um die mathematischen Grundlagen zu entwickeln und dann den Bogen bis zu den aktuellen Anwendungen zu schlagen.

Daraus folgt das Anliegen, die Allgemeine Relativitätstheorie ohne ihren mathematischen Apparat zu vermitteln, d. h. eine fachlich befriedigende und anschlussfähige Darstellung zu geben, die nicht mehr als Schulmathematik verwendet. Dieses Anliegen, bereits von Einstein 1916 formuliert (Einstein, 1916), ist seitdem in zahlreichen Unterrichtsvorschlägen sowie in populärwissenschaftlichen Darstellungen weiterverfolgt worden. Die folgenden vier Herangehensweisen haben eine größere Verbreitung gefunden:

1. Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip: Anhand von Gedankenexperimenten werden die gravitative Lichtablenkung und die gravitative Zeitdilatation thematisiert (z. B. in Einstein, 1916; Gamow, 1961; Sartori, 1996; Tipler und Mosca, 2008; Stannard, 2008).

2. Beschreibung der Geometrie gekrümmter Flächen: Am Beispiel einfacher gekrümmter Flächen wie z. B. der Kugeloberfläche werden die geometrischen Begriffe eingeführt, die im Zusammenhang mit gekrümmten Raumzeiten eine wichtige Rolle spielen, beispielsweise Metrik, Geodäten und Krümmung (z. B. in Sartori, 1996; Hartle, 2003; Stannard, 2008; Natário, 2011).

3. Rechnungen auf der Grundlage der Newtonschen Dynamik: Zu Phänomenen, die eigentlich mit der Relativitätstheorie zu beschreiben wären, beispielsweise Lichtablenkung, Schwarze Löcher oder die kosmologische Expansion, werden Rechnungen im Rahmen der Newtonschen Theorie durchgeführt (z. B. in Ehlers und Pössel, 2003; Lotze, 2005). Dahinter steht der didaktische Ansatz, dass mit vertrauten Begriffen wie

Kraft und Energie gearbeitet wird um einen direkten Zugang zu den Phänomenen (z. B. Lichtablenkung, beschrieben als Ablenkung eines klassischen Teilchenstroms) und damit zur relativistischen Astrophysik (z. B. Gravitationslinsen) zu schaffen. Die Frage nach den Grundkonzepten der Allgemeinen Relativitätstheorie und dem Konzeptwechsel gegenüber der Newtonschen Theorie wird bei diesem Zugang nicht gestellt.

4. Analogien: Im populärwissenschaftlichen Bereich ist der Einsatz von Analogien vorherrschend. Analogien werden sowohl zur Einführung von Grundkonzepten (Beispiel: ein von einer Kugel eingedelltes Gummituch illustriert das Konzept „Masse krümmt den Raum“) als auch in Bezug auf relativistische Phänomene (Beispiel: der Fuß eines Weinglases als „Gravitationslinse“) eingesetzt (z. B. in Price und Grover, 2001; Lotze, 2004). Der Zugang über Analogien birgt ein nicht unerhebliches Risiko für die Entstehung von Fehlvorstellungen (Zahn und Kraus, 2010).

Ein weiterer, wenn auch anspruchsvollerer Ansatz zur bildlichen Darstellung gekrümmter Räume und Raumzeiten nutzt Einbettungsdiagramme. Einbettungen werden für rein räumliche zweidimensionale Unterräume (Flamm, 1916; Epstein, 1994; Jonsson, 2001, 2005) sowie für raumzeitliche Unterräume (Marolf, 1998) beschrieben. Einbettungen gehen über Analogien wie die oben unter Punkt 2 und 4 erwähnten hinaus, da sie physikalisch bedeutsame Unterräume konkreter Raumzeiten darstellen, so dass ihre geometrischen Eigenschaften physikalische Bedeutung haben. Sie sind, wie die oben erwähnten Analogien, auf zweidimensionale Unterräume beschränkt.

Dieser Beitrag stellt einen neuartigen Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie vor, der wie die oben genannten das Anliegen hat mit Schulmathematik auszukommen. Er zielt auf die Grundkonzepte der Allgemeinen Relativitätstheorie ab, wie sie in knappster Form in dem bekannten Ausspruch von John Wheeler zusammengefasst sind (Wheeler, 1990):

*Spacetime tells matter how to move.
Matter tells spacetime how to curve.‡*

Der Ausspruch verdeutlicht, dass drei grundlegende Fragen zu beantworten sind:

- (i) Was ist eine gekrümmte Raumzeit?
- (ii) Wie bewegt sich Materie in einer gekrümmten Raumzeit?
- (iii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Materieverteilung und der Krümmung der Raumzeit?

Zentrales Werkzeug des hier beschriebenen Zugangs sind sogenannte *Sektormodelle*. Es handelt sich um gegenständliche Modelle, die zwei- oder dreidimensionale Unterräume gekrümmter Raumzeiten maßstabsgetreu darstellen. Die Modelle sind eine Umsetzung der im Regge-Kalkül verwendeten koordinatenfreien Beschreibung einer gekrümmten Raumzeit durch Zerlegung in kleine, ungekrümmte Sektoren (Regge, 1961).

‡ Die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll. Die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich krümmen soll.

Im Falle eines zweidimensionalen Raums sind die Sektoren ebene Flächenstücke, im Falle eines dreidimensionalen Raums Klötzchen, in deren Innerem die Geometrie euklidisch ist. Raumzeitliche Unterräume bestehen aus Sektoren mit Minkowskigeometrie. Beim Bau des Anschauungsmodells werden die Sektoren beispielsweise als Papierstücke oder Pappklötzchen ausgeführt.

Anhand von Sektormodellen lassen sich die oben genannten drei Grundfragen auf anschauliche Weise behandeln. Der Zugang ist für das nicht vertiefte Physikstudium geeignet und kann auch mit Studienanfänger/innen und fortgeschrittenen Schüler/innen eingesetzt werden. Da die Darstellung bruchlos an die Standardformulierung anschließt, kann der Zugang auch als Ergänzung zur Standarddarstellung genutzt werden, um eine geometrische Anschauung für gekrümmte Raumzeiten zu vermitteln.

Dieser Beitrag geht auf die erste der oben genannten drei Grundfragen näher ein und zeigt, wie man anhand von Sektormodellen die Eigenschaften eines gekrümmten Raums verdeutlichen kann. Als Beispiel dient die Schwarzschildraumzeit eines Schwarzen Lochs. Der folgende Abschnitt 2 schildert zunächst beispielhaft den Ablauf eines Workshops zum Begriff des gekrümmten Raums. Er wurde in dieser Weise schon mehrfach mit Schülergruppen sowie mit Lehramtsstudierenden durchgeführt. Das Konzept des Sektormodells wird darin auf nichttechnische Weise eingeführt. Hintergründe zu Berechnung und Eigenschaften der Sektormodelle folgen in Abschnitt 3, ein raumzeitliches Sektormodell wird in Abschnitt 4 vorgestellt, einen Ausblick auf weitere mögliche Anwendungen von Sektormodellen gibt Abschnitt 5.

2. „Wir basteln ein Schwarzes Loch“

In diesem Workshop wird der dreidimensionale gekrümmte Raum um ein Schwarzes Loch veranschaulicht. Mit Veranschaulichung ist gemeint, dass eine geometrische Anschauung entwickelt werden soll, die es erlaubt, die geometrischen Eigenschaften dieses gekrümmten Raums auf qualitative Weise zu erfassen.

Das Schwarze Loch als Beispielobjekt hat hierbei zwei Vorzüge: Es weckt in der Regel großes Interesse, da Schwarze Löcher aus den Medien als exotische Objekte bekannt sind. Und relativistische Effekte sind in der Nähe eines Schwarzen Lochs so groß, dass sie in einem maßstabsgetreuen Modell problemlos zu erkennen sind.

2.1. Gekrümmte Flächen

Wir beginnen den Workshop damit, dass der Begriff der Krümmung anhand von Flächen im Raum eingeführt wird. Dabei unterscheiden wir positive, negative und verschwindende Krümmung; als Prototypen werden die Sphäre, die Sattelfläche sowie die Ebene vorgestellt.

Als Kriterium zur Ermittlung der Krümmung geben wir an: Ein kleines Stück der Fläche wird ausgeschnitten und flachgedrückt. Reißt es dabei ein, ist die Krümmung positiv, wirft es Falten, ist die Krümmung negativ. Lässt es sich ohne Einreißen

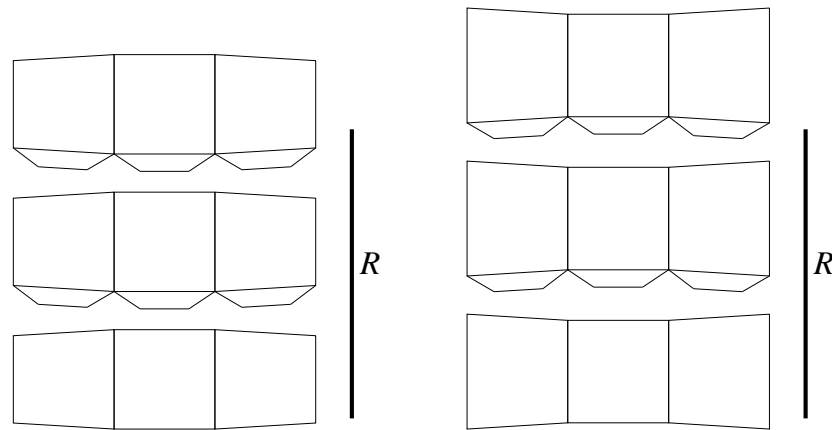


Abbildung 1. Bastelbögen gekrümmter Flächen. Links: Kugelkalotte zum Kugelradius R mit konstanter positiver Krümmung $K = 1/R^2$. Rechts: Sattelfläche mit konstanter negativer Krümmung $K = -1/R^2$. Eine Strecke der Länge R ist als Balken markiert.

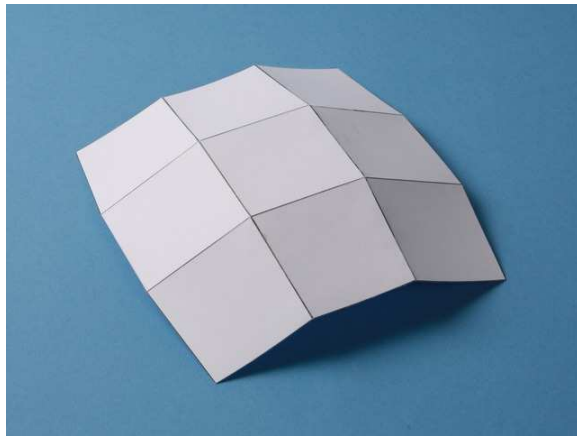
oder Faltenwerfen flach ausbreiten, dann ist die Krümmung null. Dieses Kriterium stellt das Vorzeichen der inneren (Gaußschen) Krümmung fest. An einigen Beispielen wird das Zuordnen von Krümmungen geübt; nützliche Beispiele sind insbesondere der Torus (Krümmung am Innenrand negativ, am Außenrand positiv), der zeigt, dass die Krümmung über die Fläche variieren kann und der Zylinder (Krümmung null), der aufzeigt, dass die hier definierte innere Krümmung mit der Alltagsvorstellung einer gekrümmten Fläche nicht vollständig übereinstimmt.

Der zweite Schritt illustriert, wie eine gekrümmte Fläche durch kleine ebene Flächenstücke angenähert werden kann. Dazu dienen die beiden Bastelbögen in Abb. 1. Eine Gruppe erhält die Aufgabe, aus den Bastelbögen Flächen zusammenzukleben (Abb. 2(a), 2(b)) und jeweils das Vorzeichen der Krümmung zu bestimmen. Eine zweite Gruppe wird beauftragt, die Flächenstücke zwar auszuschneiden, aber nicht zusammenzukleben, sondern auf dem Tisch auszulegen (Abb. 2(c), 2(d)) und das Vorzeichen der Krümmung daraus zu bestimmen. Das Kriterium „Aufreißen oder Faltenwerfen“ ist auch in dieser Darstellung leicht anwendbar (Abb. 2(e), 2(f)).

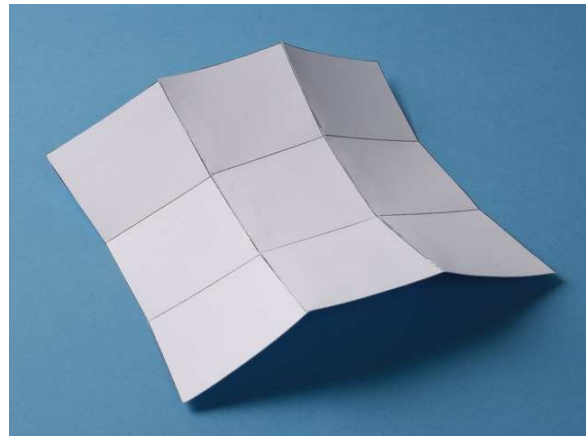
Im dritten Schritt geht es darum, sich auf die Darstellung einer gekrümmten Fläche durch ausgelegte Flächenstücke (Abb. 2(c), 2(d)) einzulassen und zu erkennen, dass man auf die vertraute Darstellung der Fläche im umgebenden dreidimensionalen Raum (Abb. 2(a), 2(b)) sogar ganz verzichten kann. Um auf diese neue Sichtweise einzustimmen, schildern wir die Weltsicht der „Flächenwesen“, die Edwin Abbott in seinem Roman „Flächenland“ (Abbott, 1884) beschreibt:

Ich nenne unsere Welt Flächenland (...). Stellt euch ein weitausgedehntes Blatt Papier vor, auf dem sich (...) Figuren (...) frei hin- und herbewegen, jedoch ohne das Vermögen, sich darüber hinaus zu erheben oder darunter zu sinken, etwa wie Schatten (...) (deutsche Übersetzung: Abbott, 1982).

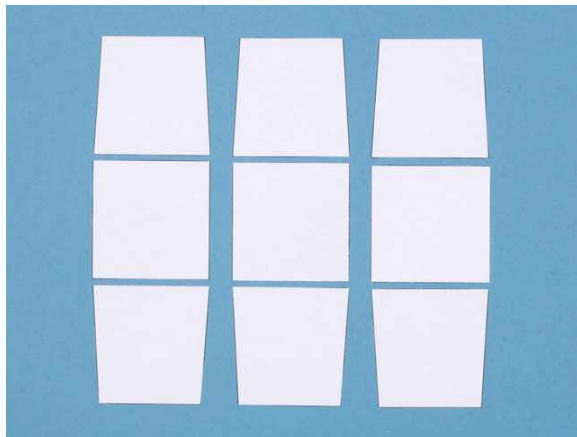
Die Flächenwesen bewegen sich in zwei Dimensionen (vor – zurück, rechts – links),



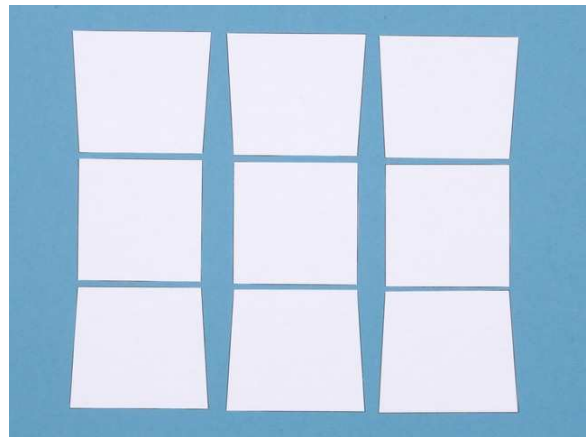
(a)



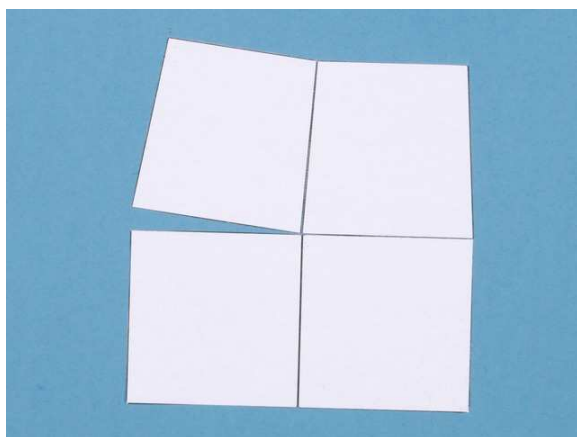
(b)



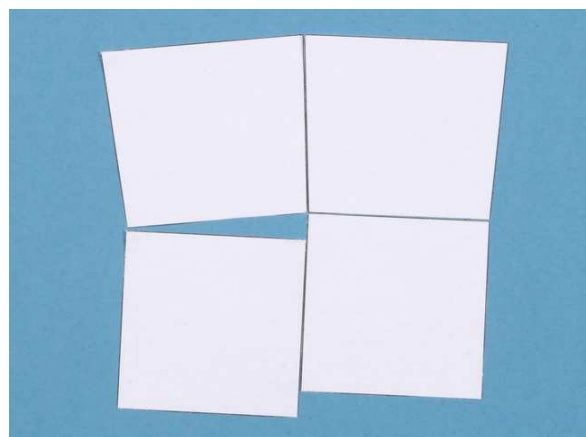
(c)



(d)



(e)



(f)

Abbildung 2. Durch ebene Flächenstücke angenäherte gekrümmte Flächen mit positiver Krümmung (a) bzw. negativer Krümmung (b). Die zugehörigen Sektormodelle (c, d) zeigen die positive Krümmung durch „Aufreißen“ (e) und die negative Krümmung durch „Faltenwerfen“ (f) an einem Vertex an.

die dritte (oben – unten) ist ihnen nicht nur unzugänglich, sondern liegt jenseits ihres Vorstellungsvermögens. Wenn wir die Abbott'sche Flächenwelt auf eine gekrümmte Fläche mit Hügeln und Tälern erweitern, bewegen sich auch hier die Flächenwesen nur in der Fläche, vor – zurück und rechts – links. Ohne einen Begriff für oben und unten ist die Wölbung der Fläche in den umgebenden dreidimensionalen Raum für die Flächenwesen nicht vorstellbar. Dennoch können sie die Krümmung ihrer Welt untersuchen. Dazu fertigen sie eine Darstellung wie in Abb. 2(c), 2(d) an: Ein Gebiet wird in Stücke eingeteilt, die so klein sind, dass sie näherungsweise eben sind. Die Kantenlängen der Stücke werden ausgemessen; ein verkleinertes Modell wird zugeschnitten und als Sektormodell in der Ebene ausgelegt (entsprechend Abb. 2(c), 2(d)). Nur wenn das vermessene Gebiet eben war, fügen sich die Stücke lückenlos zusammen. Andernfalls kann man durch Zusammenschieben benachbarter Stücke um ihren gemeinsamen Eckpunkt (wie in Abb. 2(e), 2(f)) herausfinden, ob die Fläche dort positiv oder negativ gekrümmt ist.

2.2. Gekrümmte Räume

Im vierten Schritt untersuchen wir nun einen dreidimensionalen gekrümmten Raum. Als „Raumwesen“, die drei Dimensionen kennen, von höherdimensionalen Räumen aber keine Vorstellung haben, können wir die Krümmung unseres dreidimensionalen Raums auf die gleiche Weise untersuchen wie die Flächenwesen die Krümmung ihrer Flächenwelt: Wir teilen ein Gebiet in Stücke ein (dreidimensional: Klötzchen), die so klein sind, dass der Raum in ihrem Inneren näherungsweise ungekrümmt ist. Die Kantenlängen werden ausgemessen, die Klötzchen als verkleinertes Modell nachgebaut und im ungekrümmten Raum zusammengesetzt. Nur wenn die Krümmung des vermessenen Gebiets null ist, passen die Klötzchen lückenlos zusammen. Ansonsten zeigt das Modell die Krümmung des Raums an.

Zwei solche Klötzchenmodelle – ein Modell des ungekrümmten Raums und ein Modell des gekrümmten Raums um ein Schwarzes Loch – werden in der Folge aus Bastelbögen von den Teilnehmern selbst gebaut und untersucht. Aus dem Bastelbogen „ungekrümmt Raum“ (Abb. 3 oben) entstehen neun Klötzchen mit gelben, grünen und blauen Seitenflächen (Abb. 4(a)). Zusammengelegt (gelb auf gelb und grün auf grün) haben sie die Form eines halbierten Orangenschnittes oder eines Tortenstücks (Abb. 4(b)). Nach Möglichkeit sollten mindestens drei solche Schnitze gebaut werden. Stellt man diese zusammen, so erkennt man, dass drei Schnitze eine Achtelkugel bilden (Abb. 4(c) zeigt die Erweiterung auf eine Viertelkugel aus sechs Schnitzen), in deren Zentrum eine kleine Innenkugel ausgespart ist. In Abb. 4(c) befindet sich im Inneren des Modells ein graues Klötzchen als Stütze, die das Aufstellen ermöglicht (ein Bastelbogen für die Stütze steht online zur Verfügung, siehe Zahn und Kraus (2014)). Vierundzwanzig Schnitze ergeben das vollständige Modell einer hohlen Kugel. Die Computergrafik in Abb. 5(a) zeigt einen Blick auf das weitgehend vollständige Sektormodell. Offensichtlich fügen sich alle Klötzchen lückenlos aneinander, wie es bei einem ungekrümmten Raum

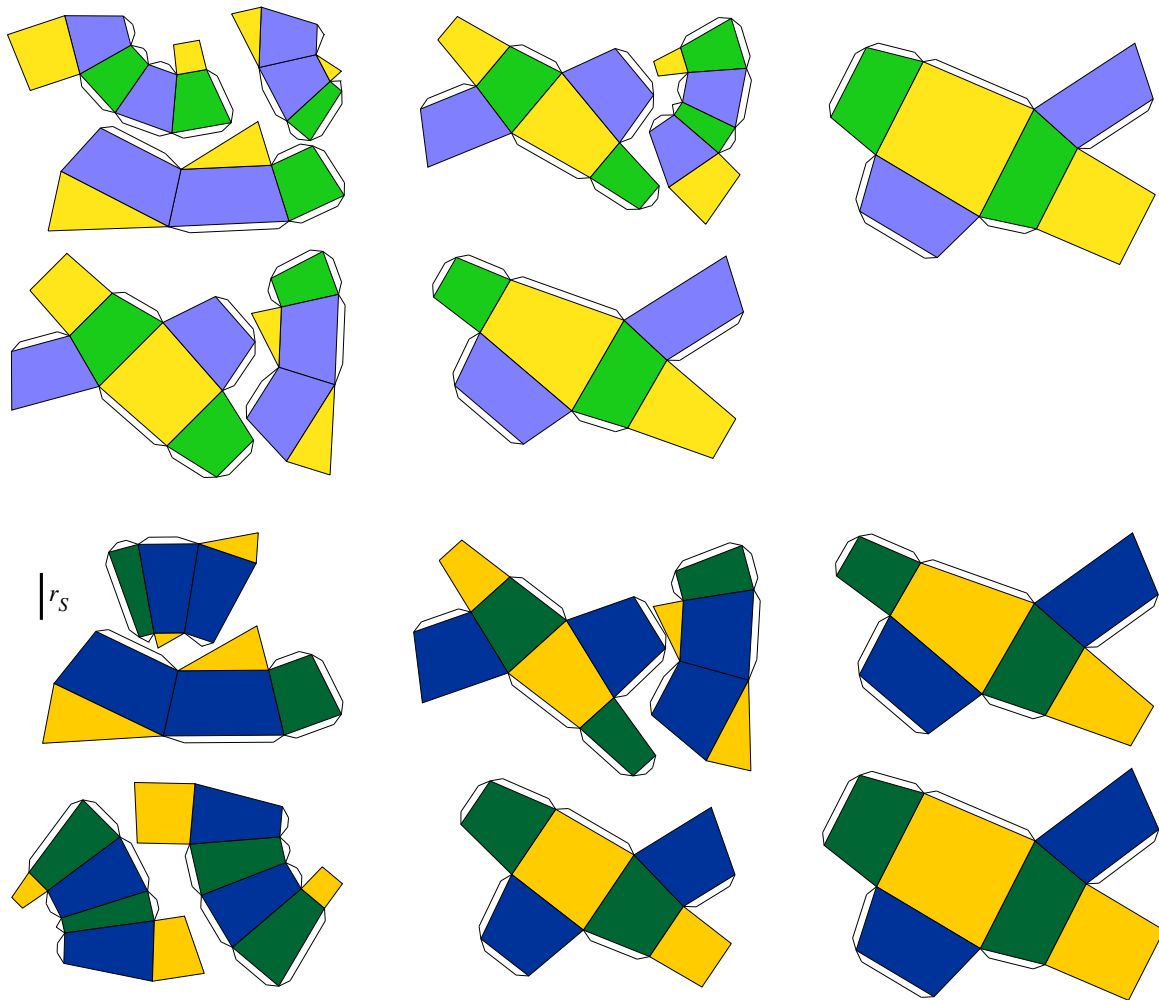


Abbildung 3. Bastelbögen für die Pappmodelle „ungekrümmter Raum“ (oben) und „Schwarzes Loch“ (unten). Der Schwarzschildradius r_S des Schwarzen Lochs ist als Balken markiert.

zu erwarten war.

Das zweite Sektormodell stellt ein Gebiet von gleicher Gestalt dar: Wiederum eine innen hohle Kugel, die nach dem gleichen Schema in 24 Schnitze zu je 9 Klötzchen eingeteilt ist. Hier aber befindet sich im Zentrum der Kugel ein Schwarzes Loch, so dass der Raum in dem betrachteten Gebiet stark gekrümmt ist. An dieser Stelle wird der Grund für die innen ausgesparte Kugel deutlich: Sie ist etwas größer als der Ereignishorizont des Schwarzen Lochs, enthält also vollständig dessen Innenbereich. Das Sektormodell kann nicht über den Ereignishorizont hinweg fortgesetzt werden, weil der Innenbereich nicht durch ein statisches Modell darstellbar ist. Aus dem Bastelbogen „gekrümmter Raum“ (Abb. 3 unten) werden 9 Klötzchen gebaut und zu einem Schnitz zusammengelegt (Abb. 4(d)). Das weitgehend vollständige Modell ist in der Computergrafik in Abb. 5(b) zu sehen. Dass die Klötzchen des zweiten Modells sich offensichtlich nicht lückenlos zu einer hohlen Kugel zusammenfügen lassen, zeigt die

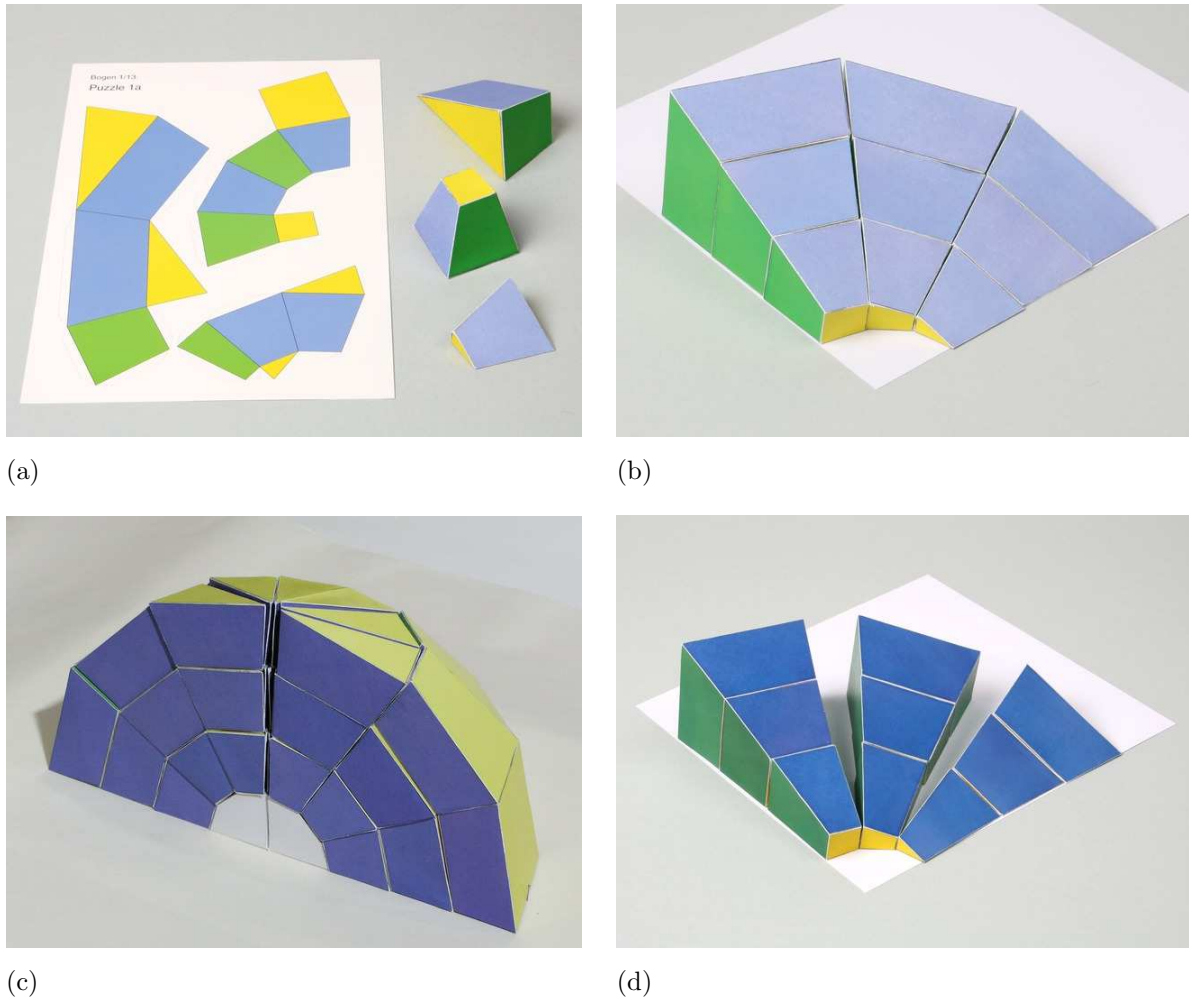
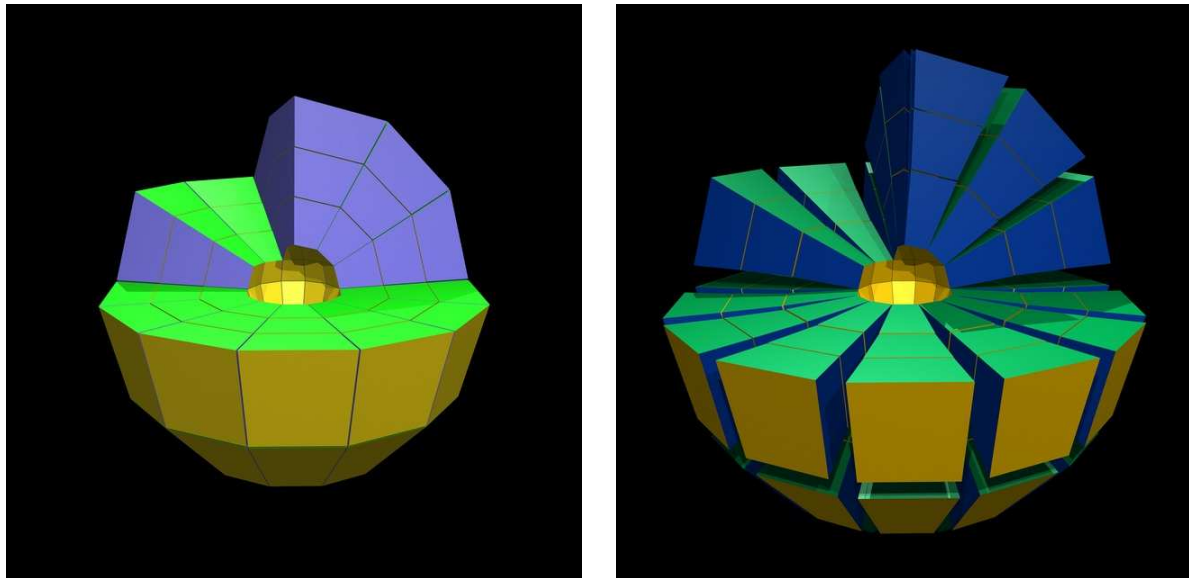


Abbildung 4. Sektormodelle: Bauteile (a), einzelner Schnitt (b) und Viertelkugel (c) des Modells „ungekrümmter Raum“, einzelner Schnitt des Modells „Schwarzes Loch“ (d).

innere Krümmung des Raums in diesem Gebiet an.

Lücken treten auf, wenn die Sektoren einer gekrümmten Fläche in der Ebene ausgebreitet werden bzw. wenn die Klötzchen eines gekrümmten Raums im ungekrümmten Raum zusammengesetzt werden. Befände sich dagegen ein Schwarzes Loch der passenden Masse im Zentrum des Modells, würden die Klötzchen *so wie sie sind* lückenlos zusammenpassen. Ebenso wie die Flächenstücke lückenlos zusammenpassen, wenn sie auf einer Fläche der passenden Krümmung ausgelegt werden.

Anhand des Sektormodells wird nun das Vorzeichen der Krümmung untersucht. Dies geschieht in Analogie zum zweidimensionalen Fall: In der Darstellung von Abb. 2(e), 2(f) werden jeweils vier Flächenstücke um ihren gemeinsamen Eckpunkt angeordnet, um die Frage „Aufreißen oder Faltenwerfen“ zu beantworten. Im räumlichen Modell haben vier Klötzchen nicht einen Punkt, sondern eine Kante gemeinsam. Ordnet man sie um diese Kante an, dann kann es passieren, dass ein Schlitz offenbleibt („Aufreißen“, positive



(a)

(b)

Abbildung 5. Sektormodelle „ungekrümmter Raum“ (a) und „Schwarzes Loch“ (b) als Computergrafiken. Angeordnet um ein Schwarzes Loch der entsprechenden Masse würden die Klötzchen des Modells „Schwarzes Loch“, so wie sie sind, lückenlos zusammenpassen.

Krümmung) wie in Abb. 6(a) oder aber dass das vierte Klötzchen in die verbleibende offene Ecke nicht hineinpasst („Faltenwerfen“, negative Krümmung) wie in Abb. 6(b). Der springende Punkt ist nun, dass die drei Teilbilder (a), (b) und (c) von Abb. 6 zu drei verschiedenen Kanten *am selben Ort* gehören. D.h. die Krümmung an ein und demselben Ort ist je nach Richtung verschieden und kann auch ein verschiedenes Vorzeichen haben. Die Krümmung ist in drei Dimensionen also nicht eine Zahl, sondern eine Größe mit mehreren Komponenten. Es ist eine der Stärken der Sektormodelle, dass sie diese grundlegende Eigenschaft von gekrümmten Räumen mit mehr als zwei Dimensionen verdeutlichen (Zahn, 2008).

Im Vergleich der beiden Modelle kann man ferner aufzeigen, dass die Gesetze der euklidischen Geometrie in einem gekrümmten Raum nicht gelten. Zum Beispiel der Zusammenhang zwischen Oberfläche und Volumen eines Körpers: Die Kugelfläche, die die Modelle nach außen begrenzt, hat in beiden Fällen denselben Flächeninhalt. Man sieht das leicht ein, wenn man die Außenseiten einander entsprechender Klötzchen aneinanderhält; sie sind gleich groß. Dasselbe gilt für den Flächeninhalt der inneren Kugelfläche. Das zwischen den beiden Flächen eingeschlossene Volumen ist jedoch verschieden: Jedes Klötzchen im Sektormodell „Schwarzes Loch“ ist in radialer Richtung länger als das entsprechende Klötzchen im Sektormodell „ungekrümmter Raum“, d. h. die Oberfläche mit demselben Flächeninhalt enthält ein größeres Volumen. An dieser Stelle wird noch einmal auf die Flächenwesen verwiesen, die in ihrer zweidimensionalen Welt vergleichbare Feststellungen machen: Wenn sie auf einem Hügel den Umfang und

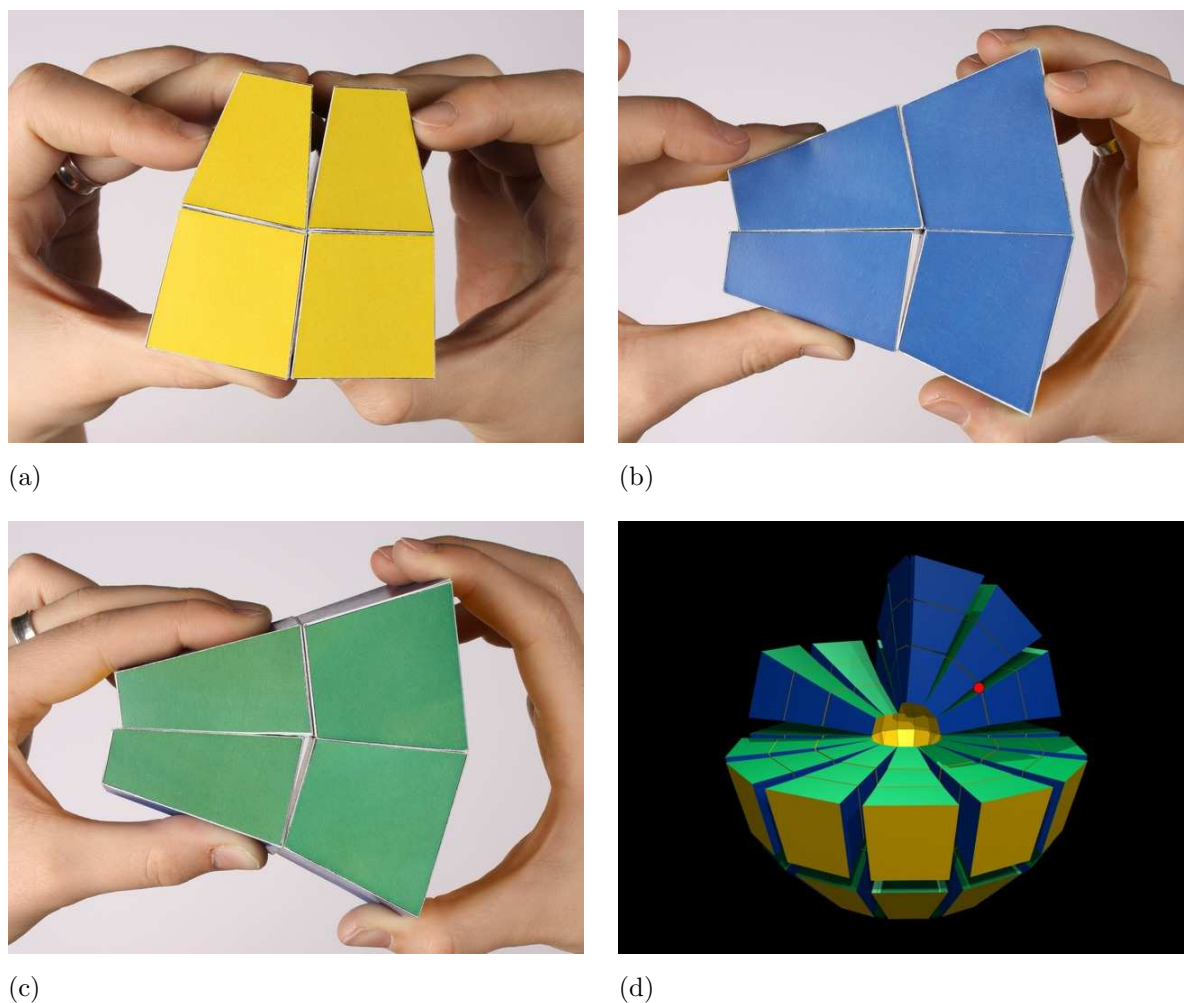
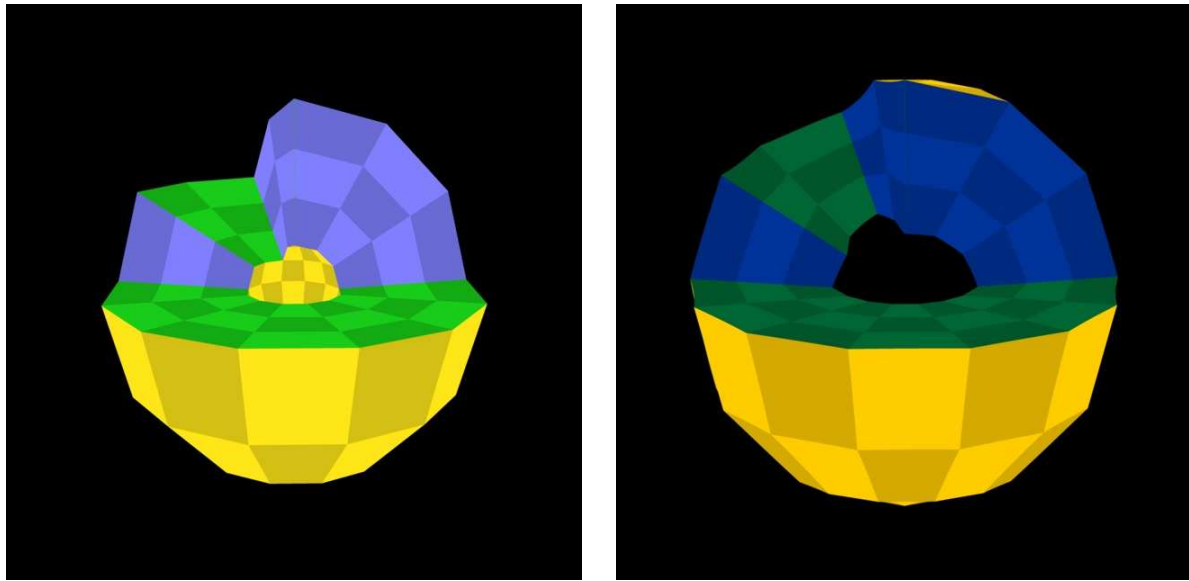


Abbildung 6. Krümmung im dreidimensionalen Raum. Der Vertex in der Bildmitte in (a), (b) und (c) ist in allen drei Teilbildern derselbe; in (d) ist er durch einen roten Punkt gekennzeichnet. Um die radiale Kante ist die Krümmung positiv (a), um die tangentialen Kanten negativ (b, c).

den Flächeninhalt eines Kreises bestimmen, dann ist der Flächeninhalt größer als er es bei gleichem Umfang in der Ebene wäre.

2.3. Visualisierung der Sektormodelle

Nach Konstruktion füllt jedes Sektormodell an seinem Ursprungsort den Raum lückenlos aus. Dies gilt auch für das Sektormodell „Schwarzes Loch“, dessen Sektoren im euklidischen Raum nicht lückenlos zusammengesetzt werden können. Man kann die Frage stellen, wie das Sektormodell an seinem Ursprungsort um ein Schwarzes Loch denn aussehen würde, wenn jedes einzelne Klötzchen die in Abb. 5(b) gezeigte Form hat und sich diese Klötzchen lückenlos zu einer Kugel schließen. Abb. 7(b) zeigt diesen Anblick, wobei die Anordnung der Klötzchen dieselbe ist wie in Abb. 5(b). Die Bilder in Abb. 7 wurden mit einem Raytracing-Verfahren berechnet, das von jedem Bildpunkt aus



(a)

(b)

Abbildung 7. Anblick des Sektormodells „an seinem Ursprungsort“: (a) euklidischer Raum, (b) Schwarzschildraum.

den eintreffenden Lichtstrahl durch die gekrümmte Raumzeit des Schwarzen Lochs zu seinem Ursprung zurückverfolgt (Zahn, 1991). Wie erwartet sind zwischen den Klötzchen keine Lücken zu sehen[§]. Im Vergleich von Abb. 7(b) mit Abb. 5(b) fällt neben gewissen Verzerrungen insbesondere auf, dass in der Visualisierung die gelbe Innenfläche des Modells nicht sichtbar ist. Diese Effekte sind eine Folge der gravitativen Lichtablenkung in der gekrümmten Raumzeit des Schwarzen Lochs.

3. Die Sektormodelle

3.1. Sektormodelle gekrümmter Flächen

Die in Abschnitt 2.1 dargestellte positiv gekrümmte Fläche ist eine Kugelkalotte zum Kugelradius R . Sie hat die Metrik

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \cos^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

mit der konstanten Gaußschen Krümmung $K = 1/R^2$. Die negativ gekrümmte Fläche ist eine Sattelfläche mit der Metrik

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \cosh^2 \theta d\phi^2 \quad (2)$$

und der konstanten Gaußschen Krümmung $K = -1/R^2$.

Zur Zerlegung in Sektoren (Abb. 2(c), Abb. 2(d)) werden Vertices mit den Koordinaten

$$\theta_i = -\frac{\pi}{6} + i \cdot \frac{\pi}{9} \quad i = 0 \dots 3,$$

[§] Um benachbarte Klötzchen im Bild unterscheiden zu können, wurden sie leicht unterschiedlich getönt.

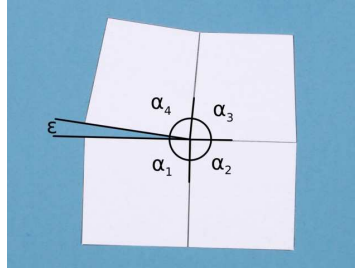


Abbildung 8. Defizitwinkel ϵ an einem Vertex.

$$\phi_j = j \cdot \frac{\pi}{9} \quad j = 0 \dots 3$$

gewählt. Die Längen der Sektorkanten sind die Längen der raumartigen Geodäten zwischen benachbarten Vertizes und werden durch Integration des Linienelements längs der Geodäten bestimmt. Aus den Kantenlängen und der Bedingung, dass die trapezförmigen Sektoren spiegelsymmetrisch sein sollen, folgt eindeutig deren Form.

Der Defizitwinkel an einem Vertex (Abb. 8) ist definiert durch

$$\epsilon = 2\pi - \sum_i \alpha_i, \quad (3)$$

wobei die Winkel α_i die Innenwinkel der an den Vertex angrenzenden Sektoren sind und sich die Summe über alle angrenzenden Sektoren erstreckt. Bei zunehmender Feinheit der Zerlegung wird die lokale Gaußsche Krümmung der Fläche durch

$$K = \rho\epsilon \quad (4)$$

approximiert, wobei ρ die lokale Dichte der Vertizes ist und ϵ der lokale Defizitwinkel (Regge, 1961).

3.2. Räumliche Sektormodelle

In Abschnitt 2.2 werden Sektormodelle des euklidischen Raums sowie der Umgebung eines Schwarzen Lochs vorgestellt. Die Metriken sind

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5)$$

für den euklidischen Raum und

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6)$$

für die dreidimensionale raumartige Hyperfläche der Schwarzschildraumzeit zu konstanter Schwarzschildzeit. Hier ist $r_S = 2GM/c^2$ der Schwarzschildradius zur Zentralmasse M , G die Gravitationskonstante und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Die als Online-Ressourcen erhältlichen Bastelbögen (Zahn und Kraus, 2014) ergeben bei Ausdruck im Format DIN A4 das Sektormodell für $r_S = 2,68$ cm, entsprechend einer Zentralmasse von drei Erdmassen.

Zur Zerlegung in Sektoren (Abb. 4) werden Eckpunkte mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} r_i &= i \cdot 1,25 r_S & i &= 1 \dots 4, \\ \theta_j &= j \cdot \frac{\pi}{6} & j &= 0 \dots 6, \\ \phi_k &= k \cdot \frac{\pi}{6} & k &= 0 \dots 11 \end{aligned}$$

gewählt. Die Zerlegung ist auf den Bereich außerhalb von $r = 1,25 r_S$ beschränkt. Innerhalb von r_S ist keine statische raumartige Hyperfläche definierbar. Genau wie bei den Modellen gekrümmter Flächen werden die Längen der Sektorkanten durch Integration des Linienelements längs raumartiger Geodäten zwischen benachbarten Gitterpunkten bestimmt. Der Symmetrie der Aufteilung entsprechend werden die Seitenflächen der Sektoren durch gleichschenklige Trapeze dargestellt. Die Form der Trapeze folgt aus den Kantenlängen und der Symmetriebedingung. Ein vollständiges dreidimensionales Modell besteht aus 216 Sektoren. Bei der gewählten symmetrischen Aufteilung in 24 identische Schnitze zu je neun Sektoren liefert ein Schnitt bereits die vollständige Information über die Geometrie. Die Bastelbögen enthalten die neun Sektoren eines Schnittes entsprechend $i = 1 \dots 4$, $j = 0 \dots 3$ und $k = 0 \dots 1$. Die Sektormodelle des euklidischen Raums und des Schwarzschildraums sind direkte Abbildungen der Metriken und zeigen (im Rahmen der groben Diskretisierung auch quantitativ korrekt) deren geometrische Eigenschaften. Insbesondere ist in radialer Richtung ein Klötzchen des Schwarzschildraums entsprechend dem aufintegrierten Metrikfaktor $\int (1 - r_S/r)^{-1/2} dr$ länger als das entsprechende Klötzchen des euklidischen Raums.

Der Defizitwinkel um eine Kante ist durch Gleichung (3) definiert. Beim euklidischen Raum ist er null, beim Schwarzschildraum hängt er von der Orientierung der Kante ab (Abb. 6). In einem lokalen Orthonormalsystem und mit einer Zerlegung längs der Koordinatenlinien werden bei zunehmender Feinheit der Zerlegung die Komponenten $R^{\hat{j}}_{\hat{k}\hat{j}\hat{k}}$ des Krümmungstensors durch

$$R^{\hat{j}}_{\hat{k}\hat{j}\hat{k}} = \rho \epsilon l \tag{7}$$

approximiert, wobei e_i , e_j , e_k die Basisvektoren sind, ρ die Dichte der in i -Richtung verlaufenden Kanten, ϵ ihr Defizitwinkel und l ihre Kantenlänge (Regge, 1961; Misner, Thorne und Wheeler, 1973).

4. Raumzeitliche Sektormodelle

Das Konzept der Annäherung einer gekrümmten Fläche oder eines gekrümmten Raums durch kleine ungekrümmte Sektoren lässt sich auf gekrümmte Raumzeiten übertragen. Die ungekrümmten Sektoren haben in diesem Fall Minkowskigeometrie. Abb. 9 zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung. Die gekrümmte Raumzeit ist hier der zweidimensionale t - r -Unterraum der Schwarzschildraumzeit mit der Radialkoordinate r als räumlicher und der Schwarzschildzeit t als zeitlicher Koordinate. Seine Metrik ist

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{8}$$

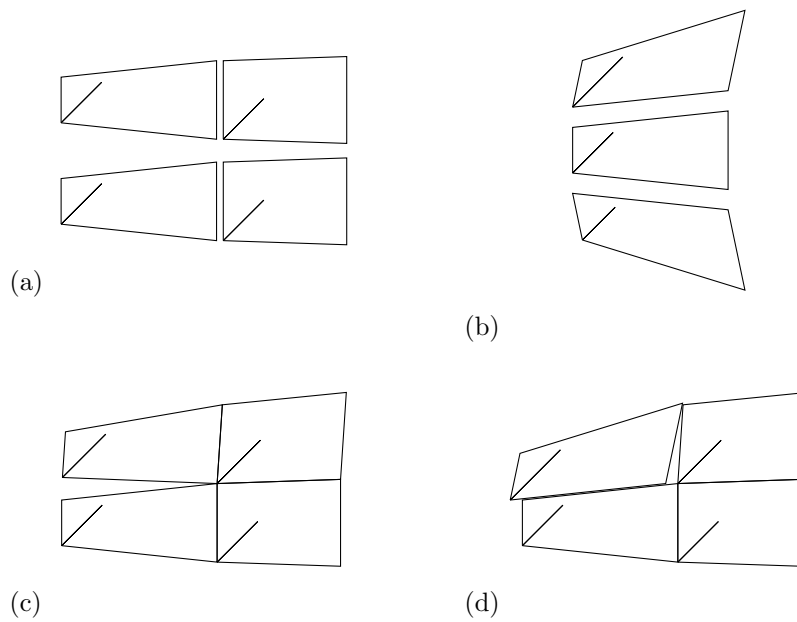


Abbildung 9. (a) Raumzeitliches Sektormodell für den t - r -Unterraum der Schwarzschildmetrik. Die räumliche Koordinatenachse verläuft horizontal, die zeitliche vertikal, die diagonalen Linien stellen die Lichtkegel dar. (b) Verschiedene Darstellungen desselben raumzeitlichen Sektors. Sie gehen durch Lorentztransformation ineinander über. (c) Defizitwinkel in raumartiger Richtung: „Aufreißen“. (d) Defizitwinkel in zeitartiger Richtung: „Faltenwerfen“.

mit dem Schwarzschildradius r_S . In diesem Abschnitt werden geometrische Einheiten verwendet, so dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist.

Zur Zerlegung in Sektoren werden Vertizes mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} t_i &= i \cdot 1,25 r_S & i &= 0 \dots 2, \\ r_j &= j \cdot 1,25 r_S & j &= 1 \dots 3 \end{aligned}$$

gewählt. Die Geodäten zwischen den Vertizes sind teils raumartig, teils zeitartig. In beiden Fällen werden die Längen der Sektorkanten durch Integration des Linienelements längs der Geodäten bestimmt. Da die Metrik von der Koordinate t unabhängig ist, werden in t -Richtung identische Sektoren aneinandergesetzt. Jeder Sektor wird durch ein gleichschenkliges Trapez dargestellt, dessen Grundseiten die zeitartigen Kanten sind. Mit dieser Symmetriebedingung wird die Form der Trapeze durch die Kantenlängen festgelegt. Abb. 9(a) zeigt die graphische Darstellung der Sektoren im Minkowskidiagramm.

Jeder Sektor hat Minkowskigeometrie und es gelten die Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie über die Minkowskiraumzeit. Dies beinhaltet insbesondere die Freiheit zur Beschreibung von Ereignissen ein beliebiges Inertialsystem zu wählen, wobei der Wechsel zwischen Inertialsystemen durch die Lorentztransformation bewerkstelligt wird. In der graphischen Darstellung als Minkowskidiagramm ist den beiden durch Lorentztransformation verbundenen Bezugssystemen der Lichtkegel gemeinsam,

während die Zeitachsen gegeneinander verdreht sind, ebenso, in Gegenrichtung, die Raumachsen. Die in Abb. 9(a) gezeigten Darstellungen der Sektoren im Raumzeitdiagramm entsprechen also jeweils der Wahl eines bestimmten Inertialsystems; beim Wechsel in ein anderes Inertialsystem ergibt sich durch Lorentztransformation eine andere graphische Darstellung im Minkowskidiagramm (Abb. 9(b)). Im raumzeitlichen Sinne bleiben Form und Symmetrieeigenschaften der Sektoren dabei jedoch erhalten, da diese auf dem unter Lorentztransformation invarianten Skalarprodukt basieren. Um die Krümmung zu untersuchen, sollen nun wiederum Sektoren um einen gemeinsamen Vertex zusammengelegt werden. Im räumlichen Fall werden die Sektoren gedreht, um die Kanten benachbarter Sektoren zur Deckung zu bringen. Im raumzeitlichen Fall tritt an die Stelle der Drehung eine Lorentztransformation. Man kann sich klarmachen, dass ein Aneinanderfügen durch Drehung in der t - r -Ebene nicht möglich ist, wenn man bedenkt, dass die Lichtkegel der zusammengefügt Sektoren identisch sein müssen. Die oben geschilderte Änderung der Darstellung beim Wechsel des Inertialsystems ermöglicht es, die Kanten benachbarter Sektoren im Minkowskidiagramm zur Deckung zu bringen (Abb. 9(c)). Ist die zerlegte Raumzeit ein globaler Minkowskiraum, dann lassen sich die Sektoren auf diese Weise zu einem lückenlosen Ausschnitt der Raumzeit zusammenfügen. Im obigen Beispiel verbleibt jedoch ein Defizitwinkel um den Vertex (Abb. 9(c)), dies zeigt eine raumzeitliche Krümmung an. Wenn, wie in diesem Beispiel, zwischen zwei raumartigen Kanten eine Lücke verbleibt, ist die raumzeitliche Krümmung positiv, im Falle einer Überlappung wäre sie negativ^{||}. Setzt man die Sektoren so zusammen, dass der Defizitwinkel zwischen zwei zeitartigen Kanten liegt, resultiert im obigen Beispiel eine Überlappung (Abb. 9(d)). Die Lücke zwischen den raumartigen und die Überlappung der zeitartigen Kanten entsprechen derselben Lorentztransformation, die nötig wäre um die an die Lücke angrenzenden Kanten zur Deckung zu bringen.

Ähnlich wie bei den gekrümmten Räumen hängt auch hier der Defizitwinkel mit der entsprechenden Komponente des Krümmungstensors zusammen: In einem lokalen Orthonormalsystem und mit einer Zerlegung längs der Koordinatenlinien wird bei zunehmender Feinheit der Zerlegung die Komponente $R^{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}}$ durch

$$R^{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = \rho\alpha \tag{9}$$

approximiert, wobei $e_{\hat{t}}$ und $e_{\hat{r}}$ die zeitartigen bzw. raumartigen Basisvektoren sind, ρ die lokale Flächendichte der Vertizes und α mit $\beta = \tanh \alpha$ der lokale Geschwindigkeitsparameter der dem Defizitwinkel entsprechenden Lorentztransformation zur Geschwindigkeit β .

5. Fazit und Ausblick

Sektormodelle sind Anschauungsmodelle, die zwei- und dreidimensionale gekrümmte Räume bzw. Raumzeiten maßstabsgetreu darstellen. Die Darstellung ist koordinatenfrei

^{||} Wird die Signatur $(+ - - -)$ gewählt, dann hat die raumzeitliche Krümmung das entgegengesetzte Vorzeichen: Sie ist negativ (positiv), wenn zwischen zwei raumartigen Kanten eine Lücke verbleibt (eine Überlappung auftritt).

und daher der geometrischen Anschauung unmittelbar zugänglich. Wir haben gezeigt, wie mit Hilfe solcher Modelle die Krümmung eines dreidimensionalen Raums sowie die Krümmung einer Raumzeit auf anschauliche Weise dargestellt werden kann. Dies ist unsere Antwort auf die erste der anfangs gestellten Fragen, was man sich denn unter einem gekrümmten Raum vorzustellen habe. Die Arbeit mit den Sektormodellen kann für sich allein stehen, kann aber auch eine Ergänzung zur üblichen Einführung des Riemannschen Krümmungstensors sein.

Der in Abschnitt 2 beschriebene Workshop zur Einführung gekrümmter Räume anhand von Sektormodellen wurde mit Studierenden, Schüler/innen der Oberstufe und erwachsenen Interessenten erprobt (Zahn und Kraus, 2004; Kraus und Zahn, 2005; Zahn und Kraus, 2010, 2012). Der vorgestellte Ablauf sowie die verwendeten Materialien sind in einem mehrfach durchlaufenen Zyklus aus Erprobung und Überarbeitung entstanden. Seit einigen Jahren wird dieser Workshop regelmäßig in der Lehramtsausbildung an der Universität Hildesheim eingesetzt.

Im Vergleich mit dem in der Einleitung erwähnten Zugang zu gekrümmten Räumen über die Eigenschaften von prototypischen gekrümmten Flächen, bietet der Einsatz von Sektormodellen eine erhebliche Erweiterung. Gekrümmte zweidimensionale Flächen werden üblicherweise eingebettet in einen dreidimensionalen Raum dargestellt. Eine Darstellung gekrümmter dreidimensionaler Räume ist auf diese Weise nicht möglich, da der dazu benötigte höherdimensionale Einbettungsraum unserer Anschauung nicht zugänglich ist. Die Sektormodelle dagegen benötigen keine Zusatzdimension. Mit ihnen können wir als Raumwesen die Geometrie des von uns bewohnten dreidimensionalen Raums untersuchen und verstehen. Darüber hinaus kann mit Sektormodellen der Tensorcharakter der Krümmung in Räumen von mehr als zwei Dimensionen verdeutlicht werden. Diese Möglichkeit bieten weder prototypische gekrümmte Flächen noch Einbettungsdiagramme.

Der Nutzen von Sektormodellen geht über die Veranschaulichung der Krümmung weit hinaus, wie in einem zweiten Teil zu diesem Beitrag gezeigt werden wird. Sektormodelle erlauben es, weitere geometrische Konzepte auf anschauliche Weise einzuführen (z. B. Paralleltransport, Geodäte) und physikalische Phänomene mit zeichnerischen statt rechnerischen Mitteln aus der Geometrie der Raumzeit zu folgern (z. B. Teilchenbahnen, Rotverschiebung). Andere Raumzeiten, die z. B. Materie enthalten oder nicht statisch sind, können auf die gleiche Weise beschrieben werden wie hier die Schwarzschildraumzeit. Anhand von Sektormodellen lassen sich also auch die zweite und dritte der anfangs genannten drei Grundfragen, nämlich die Bewegung der Teilchen sowie der Zusammenhang zwischen Krümmung und Materiedichte auf anschauliche Weise beantworten.

Literatur

Abbott E 1884 *Flatland, A Romance in Many Dimensions* (London: Seely & Co)

- Abbott E 1982 *Flächenland: ein mehrdimensionaler Roman. Aus dem Engl. übersetzt von J. Kalka* (Stuttgart: Klett-Cotta)
- Ehlers J und Pössel M 2003 Neuere Entwicklungen der relativistischen Physik in Born M *Die Relativitätstheorie Einsteins* (Berlin: Springer)
- Einstein A 1916 *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* reprint 2009 (Berlin: Springer)
- Epstein L C 1994 *Relativity Visualized* (San Francisco: Insight)
- Flamm L 1916 Beiträge zur Einstein'schen Gravitationstheorie *Physikalische Zeitschrift* **17** 448–54
- Gamow G 1961 Gravity *Sci. Am.* **204** 94–106
- Hartle J 2003 *Gravity* (San Francisco: Addison Wesley)
- Jonsson R M 2000 Embedding spacetime via a geodesically equivalent metric of euclidean signature *Gen. Relativ. Gravit.* **33** 1207–35
- Jonsson R M 2005 Visualizing curved spacetime *Am. J. Phys.* **73** (3) 248–60
- Kraus U und Zahn C 2005 Wir basteln ein Schwarzes Loch – Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie *Praxis der Naturwissenschaften Physik, Didaktik der Relativitätstheorien* **4/54** 38–43
- Lotze K-H 2004 Eine gläserne „Gravitations“-Linse *Astronomie und Raumfahrt* **5/41** 10–14
- Lotze K-H 2005 Wissenschaftsdidaktische Variationen über die Lichtablenkung am Sonnenrand *Praxis der Naturwissenschaften, Physik in der Schule* **4/54** 29–37
- Marolf D 1999 Spacetime embedding diagrams for black holes *Gen. Rel. Grav.* **31** 919 (Preprint gr-qc/9806123)
- Misner C, Thorne K und Wheeler J 1973 *Gravitation* (San Francisco: W. H. Freeman & Co.)
- Natário J 2011 *General Relativity Without Calculus* (Berlin: Springer)
- Price R und Grover E 2001 Cosmological expansion in the classroom *Am. J. Phys.* **69** (2) 125–28
- Regge T 1961 General relativity without coordinates *Il Nuovo Cimento* **19** 558–71
- Sartori L 1996 *Relativity. A Simplified Approach to Einstein's Theories* (Berkeley: University of California Press)
- Stannard R 2008 *Relativity. A Very Short Introduction* (Oxford: Oxford University Press)
- Tipler P und Mosca G 2008 *Physics for Scientists and Engineers. With Modern Physics* (San Francisco: W. H. Freeman & Co.)
- Wheeler J A 1990 *A Journey into Gravity and Spacetime* (New York: W. H. Freeman & Co.)

- Zahn C 1991 *Vierdimensionales Ray-Tracing in einer gekrümmten Raumzeit*, Diplomarbeit, Universität Stuttgart
<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/ssm/ssm.html>
- Zahn C 2008 *Visualisierung der Relativitätstheorie – Koordinatenfreie und interaktive Werkzeuge*, Dissertation, Universität Tübingen
<http://hdl.handle.net/10900/49214>
- Zahn C und Kraus U 2004 *Wir basteln ein Schwarzes Loch*, Arbeitsheft mit Bastelbögen
<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/graum/bastel.html>
- Zahn C und Kraus U 2010 Workshops zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Schülerlabor „Raumzeitwerkstatt“ an der Universität Hildesheim *PhyDid B* DD 09.03
- Zahn C und Kraus U 2012 Allgemeine Relativitätstheorie in der Schule *Inquiry-based Learning – Forschendes Lernen* Bernholt S [Hrsg.] (IPN Kiel) pp 317–19
- Zahn C und Kraus U 2014 Online-Ressourcen zum Beitrag
<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1/sectormodels1.html>