Gekrümmte Räume

Eine Unterrichtseinheit zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Mit den Bastelbögen "Wir basteln ein Schwarzes Loch" kann der Begriff des gekrümmten Raums auf Schulniveau eingeführt werden. Wir beschreiben, wie eine solche Unterrichtseinheit ablaufen kann und berichten von einem Workshop für Schülerinnen der 11. und 12. Klasse.

1 Zielsetzung: der "gekrümmte Raum"

Das Newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt Gravitation als anziehende Kraft:

Massen ziehen einander an.

Die **Einsteinsche Gravitationstheorie** (die Allgemeine Relativitätstheorie) beschreibt Gravitation als gekrümmte Raum-Zeit:

Die Masse sagt der Raum-Zeit, wie sie sich krümmen soll,

die gekrümmte Raum-Zeit sagt der Masse, wie sie sich bewegen soll.

Die gekrümmte Raum-Zeit ist ein grundlegendes Konzept der modernen Physik. Sie ist nicht leicht zu beschreiben, weil sie unserer Alltagserfahrung nicht zugänglich ist.

In diesem Projekt beschäftigen wir uns zunächst mit dem gekrümmten Raum. Ziel ist es, eine geometrisch-anschauliche Vorstellung von einem gekrümmten Raum in drei Dimensionen zu vermitteln. Dafür haben wir Bastelbögen für ein Pappmodell eines gekrümmten Raums entwickelt.

2 Das Material

Das Pappmodell gibt die geometrischen Eigenschaften des gekrümmten Raums wieder. Es handelt sich nicht um eine Analogie oder eine nur qualitativ richtige Veranschaulichung, sondern um ein korrektes Modell, das numerisch berechnet wurde.

Zu den Bastelbögen gehört ein Heft mit ausführlichen Erklärungen. Dieses Heft richtet sich in erster Linie an Leser/innen, die das Thema allein angehen wollen. Die Erläuterungen sind in eine kleine Geschichte eingebettet, damit sie die Form einer Diskussion annehmen können: Die handelnden Personen werfen die Fragen auf, welche die Bastler/innen vielleicht nur zum Teil selber formulieren würden. Da im Unterricht die Diskussion direkt geführt werden kann, ist die Rahmengeschichte hier entbehrlich. Das Heft enthält außerdem zwei Abschnitte über Astrophysik. Sie sind zum Verständnis des gekrümmten Raums nicht notwendig, aber wir konnten damit bei unseren Testleser/innen deutlich mehr Interesse wecken als mit dem abstrakten geometrischen Problem allein.

Dieses Material haben wir mit vielen erwachsenen Testleser/innen diskutiert sowie in einer Unterrichtseinheit mit Schülerinnen der Oberstufe erprobt.

Im folgenden gehen wir davon aus, dass Sie das Heft zur Hand haben oder sogar gelesen haben. Idealerweise haben Sie die Modelle bereits selber gebastelt. Wir schildern den möglichen Ablauf einer Unterrichtseinheit und einige Erfahrungen aus Einzelgesprächen und Unterricht.

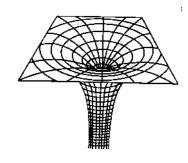
3 Einleitung

Was soll man sich unter einem gekrümmten Raum vorstellen? Ein gängiger Erklärungsversuch ist der folgende:

Eine Linie kann gerade sein oder krumm, eine Fläche eben oder gekrümmt, beim Raum ist es genauso, nur noch eine Dimension höher.

Es wird also dazu aufgefordert, unsere Vorstellung der Begriffe gekrümmt und ungekrümmt von zwei Dimensionen auf drei Dimensionen zu übertragen. Ist dieser Schritt möglich? Wir meinen, nein. Der Grund ist, dass unser räumliches Vorstellungsvermögen auf drei Dimensionen beschränkt ist. Wir können uns also vorstellen, wie sich eine Fläche in die dritte Dimension krümmt. Aber wir können uns eben nicht vorstellen, wie sich ein Raum in die vierte oder eine höhere Dimension krümmt.

Ein anderer gängiger Erklärungsversuch verwendet sogenannte Einbettungsdiagramme. Ein Schwarzes Loch beispielsweise wird meistens so dargestellt wie im Bild rechts. Diese trichterförmig gekrümmte Fläche war fast allen unseren Testleser/innen bekannt. Manche betrachteten sie lediglich als Symbol für ein Schwarzes Loch und hatten keine Erklärung für die Trichterform. Andere stellten sich vor, dass ein Schwarzes Loch aus der Nähe tatsächlich wie ein Trichter aussieht, in den man auch hineinfallen kann ("Auf dem Bild ist ja ein Loch zu sehen, und es heißt schließlich Schwarzes Loch"). Sie stießen dann aber auf den Widerspruch, dass sie sich ein Schwarzes Loch eigentlich kugelsymmetrisch vorstellen.



Tatsächlich handelt es sich beim Trichtermodell um eine Darstellung der inneren Geometrie einer Äquatorebene des Schwarzen Lochs. Wegen der Kugelsymmetrie eines (nichtrotierenden) Schwarzen Lochs beschreibt das Trichtermodell den gekrümmten Raum sogar vollständig. Diese Darstellung ist allerdings sehr abstrakt und ist nicht leicht in eine anschauliche dreidimensionale Vorstellung umzusetzen.

Mit unseren Bastelbögen möchten wir einen anderen Zugang zu gekrümmten Räumen vorschlagen. Im ersten Schritt bauen wir je ein dreidimensionales Pappmodell eines ungekrümmten Raums (weit weg von Massen) und eines gekrümmten Raums (in unmittelbarer Nähe eines Schwarzen Lochs). Die beiden werden verglichen, wobei das Pappmodell des gekrümmten Raums zunächst unverständlich erscheint. Mit dem "gesunden Menschenverstand" betrachtet, erscheint es in sich widersprüchlich.

Der zweite Schritt soll das Modell des gekrümmten Raums verständlich machen. Dabei akzeptieren wir, dass wir uns nur drei Dimensionen vorstellen können. Um besser zu verstehen, was das bedeutet, versetzen wir uns in die Situation eines "Flächenwesens", d. h. eines Wesens, das in zwei Dimensionen lebt und sich auch nur zwei Dimensionen vorstellen kann. Vom Standpunkt des Flächenwesens aus wiederholen wir Schritt 1, indem wir zweidimensionale Pappmodelle einer gekrümmten und einer ungekrümmten Fläche vergleichen. Dabei wird deutlich, wie es zu den in Schritt 1 gefundenen Widersprüchen kommt und dass diese nur scheinbar sind.

Als Ergebnis der Überlegungen erwarten wir, dass eine qualitative Vorstellung des Begriffs "ge-krümmter Raum" erworben wird, so dass beispielsweise die Frage *Wie können wir feststellen, ob wir uns in einem gekrümmten oder in einem ungekrümmten Raum befinden?* beantwortet werden kann.

4 Die Modelle

4.1 Ungekrümmter Raum

Aus den Bastelbögen "Puzzle 1" werden neun Pappkörperchen gebaut. Würde man jedes der Pappkörperchen in 24 Exemplaren bauen, dann könnte man die insgesamt 216 Bauteile zu einer Kugel zusammenfügen, die in der Mitte einen kleinen Hohlraum hat. Da 216 Bauteile nur die zähesten Modellbauer wirklich erfreuen würde, ist Puzzle 1 nur ein kleiner Ausschnitt der Kugel.

Ziel: Die neun Bauteile von Puzzle 1 zu einem "Schnitz" zusammenpuzzeln und sich dann klarmachen, dass aus 24 solchen Schnitzen eine Kugel gebaut werden kann.

Tipps: Es ist sinnvoll, das Basteln und Puzzeln in kleinen Gruppen durchzuführen, da eine einzelne Person recht lange brauchen würde. Wenn z. B. sechs Gruppen je einen "Schnitz" bauen, kann man die sechs Schnitze zu einer Viertelkugel zusammensetzen, so dass das Bauprinzip klar wird. (Damit die Viertelkugel nicht zusammenfällt, braucht man eine Stütze, die ihren inneren Hohlraum ausfüllt. Ein zusätzlicher Bastelbogen für eine solche Stütze befindet sich im Anhang.)

4.2 Gekrümmter Raum

Wir betrachten nun den Fall, dass der Hohlraum der Kugel nicht leer ist, sondern ein Schwarzes Loch enthält. Der Raum ist dann gekrümmt. Er wird nach dem oben erkannten Schema in Bauteile zerlegt. Wegen der Raumkrümmung sehen die Teile aber anders aus als in Puzzle 1. Sie werden aus den Bastelbögen "Puzzle 2" gebastelt.

Ziel: Die neun Bauteile von Puzzle 2 zu einem "Schnitz" zusammenpuzzeln. Mit Puzzle 1 vergleichen. Dabei soll zur Sprache kommen: (i) 24 solche Schnitze lassen sich nicht lückenlos zu einer Kugel zusammenfügen, (ii) jedes Bauteil hat ein größeres Volumen als das entsprechende Bauteil von Puzzle 1, (iii) die gelben Außenflächen sind bei den Bauteilen beider Puzzles gleich. Aus (ii) und (iii) muss man schließen, dass die Kugel von Puzzle 2 dieselbe Oberfläche hat wie die von Puzzle 1, aber gleichzeitig ein größeres Volumen.

Hinweise: Die Bedeutung der Bauteile ist in Form einer Meßvorschrift im Heft S. 16-17 genau beschrieben. Für die Fragen, die beim Vergleich der beiden Puzzles auftauchen sollten, siehe S. 18-19.

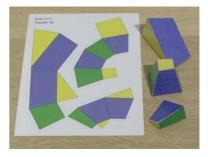


Bild 1: Bastelbogen, Bauteile

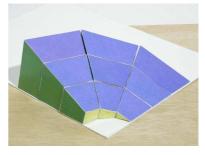


Bild 2: Schnitz, ungekrümmter Raum

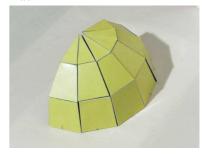


Bild 3: Viertelkugel



Bild 4: Viertelkugel, andere Sicht

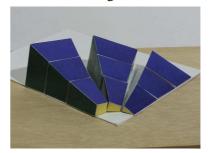


Bild 5: Schnitz, gekrümmter Raum

4.3 Flächen

Der Wechsel auf die Sichtweise eines Flächenwesens ist der gedanklich schwierigste Teil der Überlegung (Heft S. 20-21). Wenn die zweidimensionale Weltsicht akzeptiert ist, wird zunächst aus den Bastelbögen "Puzzle 3" eine ebene Fläche ausgeschnitten und eine gekrümmte Fläche gebastelt. In Analogie zum Raum, der in Klötzchen zerlegt wird, kann man die beiden Flächen in Flächenstücke zerlegen. Die Flächenstücke, welche die gekrümmte Fläche ergeben, sind auf dem Bastelbogen "Puzzle 3" zu finden. Die ebene Fläche kann man wahlweise in Flächenstücke zerschneiden oder sich die Aufteilung lediglich denken.

Ziel: Die Flächenstücke zur ebenen und zur gekrümmten Fläche werden auf dem Tisch zusammengepuzzelt. Es soll deutlich werden, dass aus der Sicht eines Flächenwesens genau dieselben Probleme (i) bis (iii) auftauchen, die sich uns beim Vergleich von Puzzle 1 und Puzzle 2 gestellt haben. Insbesondere haben beide Flächen den gleichen Umfang, aber die gekrümmte Fläche hat einen größeren Flächeninhalt.

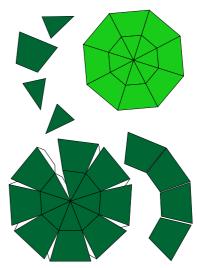


Bild 6: Flächen, Flächenstücke

Im Fall der Flächen ist uns als dreidimensional denkenden Raumwesen allerdings klar, dass hier keine Widersprüche vorliegen. Alle Beobachtungen sind notwendige Konsequenzen davon, dass die eine Fläche eben und die andere Fläche gekrümmt ist.

Fazit: Ein Flächenwesen kann sich die Krümmung in die dritte Dimension nicht vorstellen, aber es kann durch Messungen feststellen, ob eine Fläche gekrümmt ist, wie stark sie gekrümmt ist usw. Und auch wenn die Flächenstücke sich nicht lückenlos zusammenschieben lassen, kann man sie trotzdem als Landkarte der gekrümmten Fläche verwenden.

Dasselbe gilt für uns Raumwesen in Bezug auf gekrümmte Räume: Wir können sie vermessen und damit alles über ihre Krümmung herausfinden. Und wir können Puzzle 2 als dreidimensionale Raumkarte verwenden, um uns zurechtzufinden.

5 Praktische Durchführung

In einem Workshop für Schülerinnen der 11. und 12. Klasse wurde dieses Projekt durchgeführt. Es standen dafür drei Stunden zur Verfügung. Zum Basteln und Puzzeln wurden sechs Vierergruppen gebildet. Der Ablauf war wie folgt:

- Begrüßung, Einführung ins Thema (Schwarze Löcher, Gravitation, Relativitätstheorie, 30 Minuten)
- Puzzle 1 bauen (30 Minuten)
- Puzzle 1 besprechen, Überleitung zu Puzzle 2
- Puzzle 2 bauen (20 Minuten)
- Puzzle 2 besprechen, wesentliche Fragen an der Tafel notieren
- Standpunktwechsel: Sichtweise von Flächenwesen einnehmen

- Puzzle 3 bauen (10 Minuten)
- Puzzle 3 besprechen, Bezug zu den Fragen zu Puzzle 2 herstellen
- Abschluß und Ausblick (Zusammenfassung, Lichtablenkung als Folge der gekrümmten Raum-Zeit, Computersimulationen der Lichtablenkung an Schwarzen Löchern, Bilder des Hubble Space Teleskops von der Lichtablenkung an Galaxienhaufen, 30 Minuten)

6 Auswertung

Das Interesse der Schülerinnen an den astrophysikalischen Themen war offensichtlich. In der Pause kamen viele weiterführende Fragen u.a. nach Schwarzen Löchern, dem Urknall und der Expansion des Weltalls. Das Basteln hat den meisten sichtlich Spaß gemacht; am größten war das Interesse bei Puzzle 2, als durch Basteln herausgefunden werden musste, wie sich die Raumkrümmung bemerkbar macht. Der Workshop war einer von vier Kursen in einem zweitägigen Physik-Schnupperstudium für Schülerinnen an der Universität Tübingen. Am Ende der zwei Tage wurden die Schülerinnen mittels Fragebogen danach gefragt, was ihnen gefallen hat und was nicht. Dabei war der Themenbereich Relativitätstheorie/Schwarze Löcher/Basteln derjenige, der am öftesten unter "gut gefallen" genannt wurde (die anderen Themen waren Supraleitung, Halbleiterpraktikum, rechnergestützte Physik am Beispiel von Neutronensternen und Schwarzen Löchern).

Mit einer größeren Anzahl von erwachsenen Testleser/innen haben wir in verschiedenen Stadien der Ausarbeitung ausführlich diskutiert. Wie zufrieden jemand mit unserem Zugang war, hing dabei auch damit zusammen, welche Vorstellungen von Verständnis und von Lernen er oder sie hat. Zunächst bestand allgemein die Erwartung, den gekrümmten Raum in bestehende Vorstellungen einzuordnen und mit Hilfe der alltäglichen geometrischen Anschauung verständlich zu finden. Es ist generell klar geworden, dass das nicht möglich ist und dass wir als dreidimensional denkende Wesen hier an die Grenzen unserer Vorstellungskraft stoßen. Manche reagierten auf diese Erkenntnis mit einer gewissen Enttäuschung ("Ach so, also kann man das gar nicht verstehen") und verloren gleichzeitig das Interesse daran, sich die Eigenschaften des gekrümmten Raums noch genauer anzusehen. Andere dagegen fanden es hochinteressant, dass Alltagserfahrung und Schulkenntnisse gar nicht so selbstverständlich richtig sind wie meist gedacht. Diese Einstellung war verbunden mit dem Bewußtsein, dass unsere Vorstellungen von der Welt Konstruktionen sind, die wir im Laufe der Zeit entwickelt haben und die weiterentwickelt werden können.

Da wir das Modell weiter ausbauen möchten, sind wir für Erfahrungsberichte und kritische Kommentare dankbar.

Kontakt:

ute.kraus@uni-tuebingen.de corvin.zahn@uni-tuebingen.de

Anhang: Stütze

Bastelbogen für die in Abschnitt 4.1 erwähnte Stütze. Teil a und Teil b ergeben zusammen ein Bauteil in der Form einer Achtelkugel. Zwei solche Bauteile werden benötigt, wenn Puzzle 1 sechsmal vorhanden ist und die sechs Schnitze zu einer Viertelkugel zusammengesetzt werden sollen.

