Lichtablenkung für die Schule: Von der Metrik zur Geodäte

Ute Kraus und Corvin Zahn

Die Lichtablenkung im Schwerefeld war einer der ersten Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie und hat inzwischen eine große Bedeutung für die Astronomie erlangt. Die Behandlung dieses Themas in der Schule steht jedoch vor dem Problem, dass die theoretische Beschreibung über Schulmathematik weit hinausgeht. In diesem Beitrag beschreiben wir eine zeichnerische Methode, mit der Schülerinnen und Schüler für eine gegebene Metrik Geodäten selbstständig ermitteln können.

Einleitung

Matter tells space how to curve.
Space tells matter how to move.
(John Wheeler)

Ende 1915 vollendete Albert Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie, die die Schwerkraft als Krümmung der Raumzeit beschreibt. Die Materieverteilung bestimmt die Geometrie der Raumzeit und die Geometrie bestimmt die Bewegung der Materie: Gravitation ist Geometrie!
Kaum zwei Monate später, also vor fast genau 100 Jahren fand Karl Schwarzschild die Geometrie der Raumzeit um eine kugelsymmetrische Masse [1]. Mit dieser Lösung der Einsteinschen Gleichungen können die Gravitationswirkungen von kugelförmigen Himmelskörpern wie Planeten, Sternen, Neutronensternen und Schwarzen Löchern beschrieben werden.

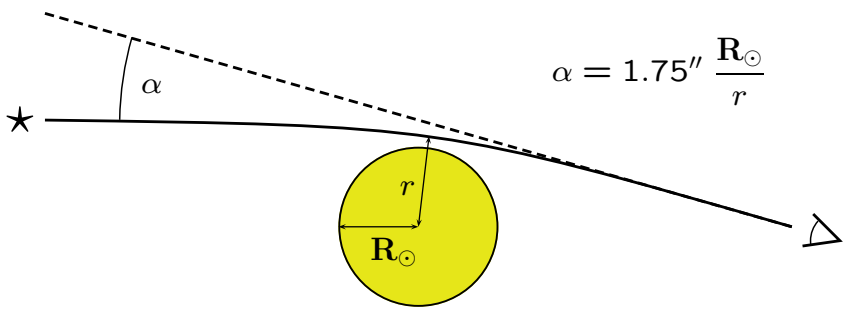


Abbildung 1: Lichtablenkung am Sonnenrand. Ein entfernter Stern (links) wird um den Winkel α versetzt gesehen. Der Winkel ist hier stark übertrieben dargestellt. 1,75 Bogensekunden entsprechen einer Haaresbreite in einer Entfernung von 10 m. Der Ablenkwinkel nimmt mit zunehmendem Abstand r ab.

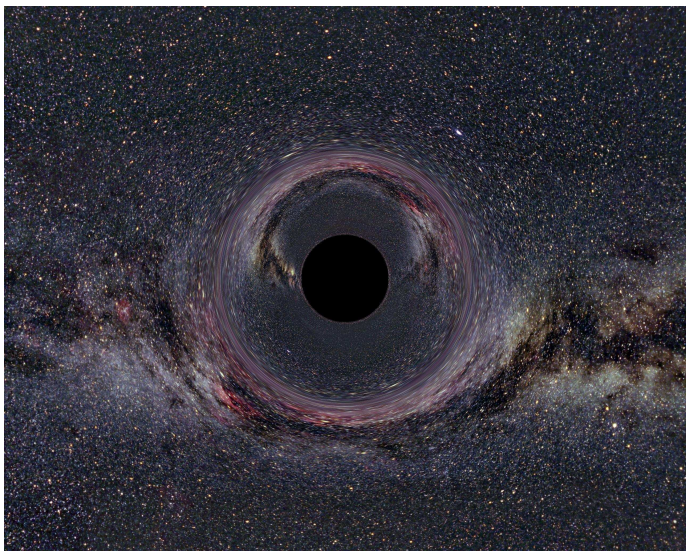


Abbildung 2: In der Computersimulation befindet sich ein Schwarzes Loch vor dem leuchtenden Band der Milchstraße. Aus dem Innenbereich, der durch den sogenannten Ereignishorizont begrenzt wird, kann weder Licht noch Materie entweichen; er erscheint als schwarze Scheibe.

Die Bahnen von Teilchen und Licht werden von der Geometrie der Raumzeit bestimmt. Teilchen und Licht laufen auf lokal geraden Linien, den sogenannten Geodäten, durch die gekrümmte Raumzeit. Zu den vielen Schlussfolgerungen, die man aus Schwarzschilds Beschreibung der Raumzeit ziehen kann, gehört die Lichtablenkung: Licht, das nahe an einer kugelsymmetrischen Masse vorbeiläuft, hat nach dem Passieren eine andere Richtung als zuvor. Diese Vorhersage war historisch wichtig: Der Nachweis der Lichtablenkung an der Sonne (Abb. 1) durch Arthur Eddington im Jahr 1919 war ein wichtiger Test der damals neuen Gravitationstheorie. Am Rand der Sonne beträgt die Ablenkung 1,75 Bogensekunden. Dies ist ein sehr kleiner Winkel und er war damals sehr schwer zu messen. Das liegt daran, dass in unserer näheren astronomischen Umgebung die Raumzeit nur sehr schwach gekrümmt ist; die Geometrie ist annähernd euklidisch. Große Ablenkwinkel erhält man z. B. in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Dort werden die optischen Verzerrungen so groß, dass sie mit dem bloßen Auge sichtbar wären (Abb. 2). Dieser Beitrag schildert einen schultauglichen Zugang zum Phänomen der Lichtablenkung. Er ist einerseits nah an der Theorie, denn er basiert auf der Beschreibung der Raumzeitgeometrie durch eine Metrik und der Bestimmung von Teilchen oder Lichtbahnen als Geodäten, d. h. lokal geraden Kurven. Andererseits ist die Allgemeine Relativitätstheorie als geometrische Theorie der direkten geometrischen Anschauung zugänglich. Die Materialien, die wir vorstellen, betonen diesen geometrischen Aspekt und kommen dadurch mit Schulmathematik aus. Am Beispiel eines Schwarzen Lochs erläutern wir, wie ein gekrümmter Raum in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Angabe einer Metrik beschrieben wird. Wir geben eine zeichnerische Methode an, mit der Schülerinnen und Schüler für eine gegebene Metrik Geodäten selbstständig ermitteln können.

Die Metrik als Instrument zur Beschreibung von Flächen

In diesem Abschnitt schildern wir eine Einführung in den Begriff der Metrik. Ausgangspunkt ist die Frage nach dem Abstand nahe benachbarter Punkte, zunächst in der Ebene

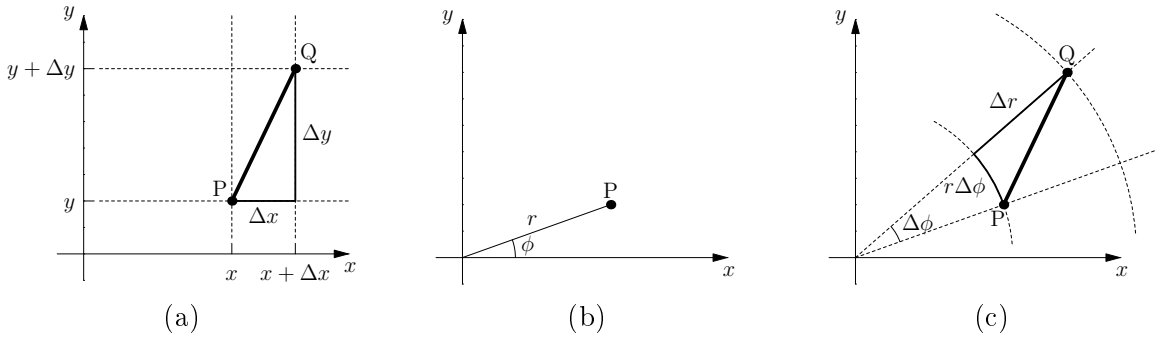


Abbildung 3: Beispiele für Metriken. a: Abstand in kartesischen Koordinaten, b: Polarkoordinaten, c: Abstand in Polarkoordinaten.

in kartesischen Koordinaten sowie in Polarkoordinaten, dann auf der Kugeloberfläche. Nach diesen drei Beispielen für Metriken wird die umgekehrte Frage aufgeworfen und beantwortet: Gegeben eine Metrik, was kann man daraus über die Fläche lernen?
In einer ebenen Fläche hat Punkt P die kartesischen Koordinaten x und y. Ein nahe benachbarter Punkt Q hat Koordinaten, die sich von x und y nur geringfügig unterscheiden: $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$. Gesucht ist der Abstand zwischen den beiden Punkten. In dem rechtwinkligen Dreieck von Abb. 3a liest man ab, dass für den Abstand Δs gilt:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \tag{1}$$

Wenn die Unterschiede in den Koordinaten gegeben sind, dann liefert Gleichung (1) den Abstand. Eine solche Funktion bezeichnet man als Metrik. Gleichung (1) gibt die Metrik einer ebenen Fläche in kartesischen Koordinaten an.
Polarkoordinaten sind eine andere Möglichkeit, die Punkte einer ebenen Fläche zu bezeichnen. Für einen Punkt P werden die Radialkoordinate r und der Azimutwinkel ϕ angegeben (Abb. 3b). Gesucht ist der Abstand zu einem benachbarten Punkt Q. Falls Q denselben Azimutwinkel, aber eine andere Radialkoordinate $r+\Delta r$ hat, ist der Abstand der Punkte Δr. Hat Q dieselbe Radialkoordinate, aber einen anderen Azimutwinkel $\phi + \Delta\phi$, dann hat der Kreisbogen zwischen den Punkten die Länge $r\Delta\phi$. Wenn die Punkte sehr nahe beieinander sind, dann ist dieser kleine Abschnitt des Kreisbogens beinahe gerade und ist praktisch gleich dem Abstand der beiden Punkte. Unterscheiden sich beide Koordinaten, dann findet man anhand des in Abb. 3c eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks, dass

$$(\Delta s)^2 = (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\phi)^2 \tag{2}$$

ist. Gleichung (2) gibt die Metrik einer ebenen Fläche in Polarkoordinaten an.
Auf die gleiche Weise beschreibt man Abstände auf gekrümmten Flächen. Werden zum Beispiel die Punkte auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R durch die üblichen Kugelkoordinaten θ und ϕ bezeichnet, dann gilt für den Abstand nahe benachbarter Punkte

$$(\Delta s)^2 = R^2(\Delta\theta)^2 + R^2\sin^2\theta\,(\Delta\phi)^2. \tag{3}$$

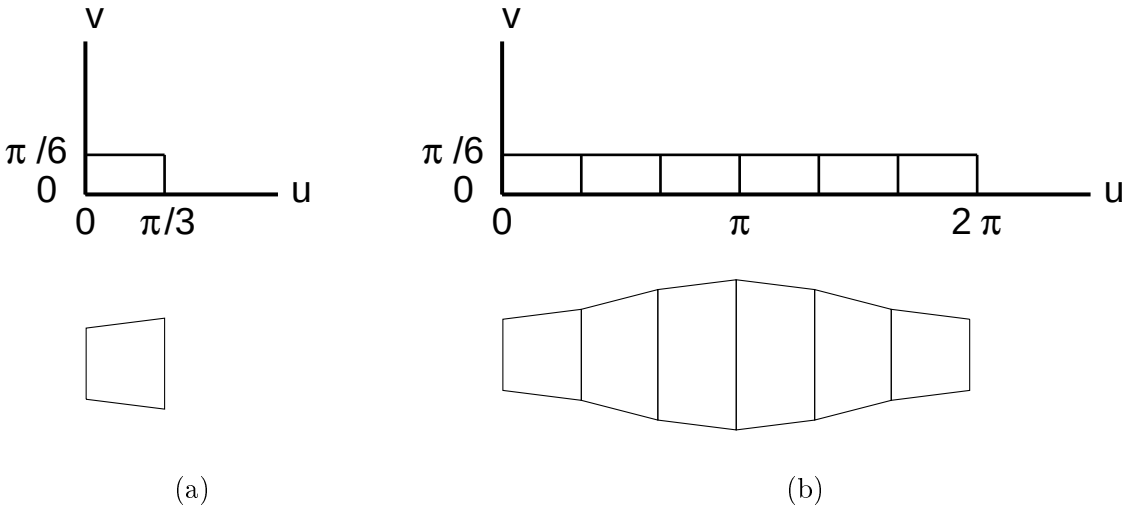


Abbildung 4: Untersuchung einer Metrik. a: ein Viereck im Koordinatenraum und das zugehörige Viereck in der Fläche, b: ein Streifen im Koordinatenraum, der den ganzen u-Bereich abdeckt sowie der zugehörige Streifen in der Fläche.

Gleichung (3) gibt die Metrik der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten an. Diese drei Beispiele illustrieren, was eine Metrik leistet: Sie ermöglicht es, Koordinatenunterschiede nahe benachbarter Punkte in Abstände umzurechnen. Auf den ersten Blick mag das nach wenig aussehen. Tatsächlich aber steckt in der Metrik die gesamte innere Geometrie der Fläche.

Mit der folgenden Aufgabe kann man recht eindrucksvoll zeigen, wie viel die Metrik über eine Fläche aussagt. Die Fragestellung: Von einer Fläche ist nur ihre Metrik bekannt. Sie lautet

$$(\Delta s)^2 = b^2(\Delta u)^2 + (a - b\cos u)^2(\Delta v)^2. \tag{4}$$

Hier sind u und v Koordinaten auf der Fläche, die jeweils Werte von 0 bis 2π annehmen. Die Größen a und b sind Konstanten; für das konkrete Beispiel haben sie die Werte $a = 7$ cm und $b = 2{,}5$ cm. Was für eine Fläche ist das? Welche geometrische Bedeutung haben die Koordinaten?

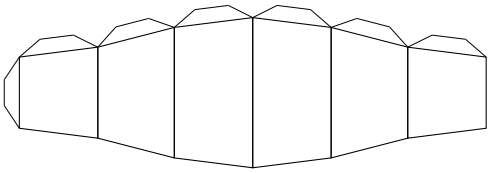
Wir beginnen mit einem kleinen Ausschnitt der Fläche. Er umfasst in u-Richtung ein Sechstel des Koordinatenbereichs und in v-Richtung ein Zwölftel (Abb. 4a oben). Das Viereck im Koordinatenraum entspricht einem Viereck in der Fläche, das aber nicht notwendigerweise rechteckig ist. Man verschafft sich Größe und Form des Vierecks in der Fläche, indem man die Längen der vier Kanten berechnet; dies ermöglicht die Metrik. Die obere und die untere Kante sind Kanten zu konstantem v und haben beide die Länge

$$\Delta s = b\,\Delta u = b\,\pi/3 \qquad (\Delta v = 0). \tag{5}$$

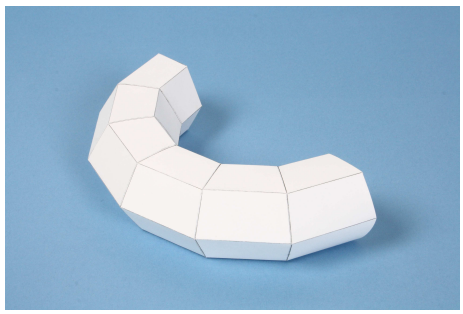
Die seitlichen Kanten sind Kanten zu konstantem u mit der Länge

$$\Delta s = (a - b\cos u)\,\Delta v = (a - b\cos u)\,\pi/6 \qquad (\Delta u = 0). \tag{6}$$

Für die linke Kante mit $u = 0$ ergibt sich $\Delta s = (a - b)\,\pi/6$, für die rechte Kante mit $u = \pi/3$ erhält man $\Delta s = (a - b/2)\,\pi/6$. Da die obere und die untere Kante gleich lang



(a)



(b)

Abbildung 5: Torus. a: Streifen mit Klebelaschen für den Bau der Fläche, b: Der aus der Metrik als Facettenfläche konstruierte Torus.

sind, wird das Viereck als symmetrisches Trapez konstruiert (Abb. 4a unten): Dies ist der kleine Ausschnitt der Fläche, der dem vorgegebenen Koordinatenbereich entspricht. In einem zweiten Schritt wird diese Berechnung auf den ganzen u-Bereich erweitert. Für weitere fünf Abschnitte, die ebenfalls je ein Sechstel des u-Koordinatenbereichs umfassen (Abb. 4b oben) werden die Flächenstücke berechnet. Resultat ist der in Abb. 4b unten gezeigte Streifen. Schließlich soll auch der gesamte v-Bereich abgedeckt werden. Er wird in insgesamt zwölf Abschnitte gleicher Koordinatenlänge eingeteilt. Zu jedem Abschnitt gehört ein Streifen aus sechs Flächenstücken. Da die Metrik von der Koordinate v nicht abhängt, sind alle zwölf Streifen identisch.

Mit Hilfe der in Abb. 5a hinzugefügten Klebelaschen kann nun die Fläche aus zwölf Streifen zusammengebaut werden. Eine Kopiervorlage steht als Begleitmaterial zu diesem Beitrag auf [2] zur Verfügung. Wenige Streifen genügen, um die Fläche zu erkennen: Die aneinandergefügten Streifen wölben sich in die Form eines Rings. Wenn man jeden Streifen schließt (also die Koordinatenwerte $u = 0$ und $u = 2\pi$ identifiziert) und den zwölften an den ersten Streifen anschließt (also $v = 0$ und $v = 2\pi$ identifiziert), entsteht ein Torus. Anhand des zusammengebauten Torus wird auch die geometrische Bedeutung der Koordinaten klar: Ein Querschnitt der Röhre ist ein Kreis mit Radius b und Winkelkoordinate u. Die Mittellinie der Röhre ist ein Kreis mit Radius a und Winkelkoordinate v.

Man erkennt an diesem Beispiel, was in der Metrik steckt und was nicht: Wie sich die Fläche krümmt, ergibt sich zwangsläufig aus den Abmessungen der Flächenstücke, die allein durch die Metrik bestimmt sind. Die geometrische Bedeutung der Koordinaten lässt sich an der rekonstruierten Fläche erkennen. Globale Bedingungen, z. B. dass es sich um eine geschlossene Fläche handelt, müssen zusätzlich zur Metrik angegeben werden.

Bei der Konstruktion der Flächenstücke wurden die Eckpunkte als nahe benachbarte Punkte behandelt, deren Abstand durch die Metrik gegeben ist. Dementsprechend wurden die Flächenstücke als klein angesehen und als näherungsweise eben beschrieben. Die mit diesen Näherungen nachgebaute Fläche ist eine Facettenfläche, welche den Torus um so besser annähert, je feiner die Unterteilung ist.

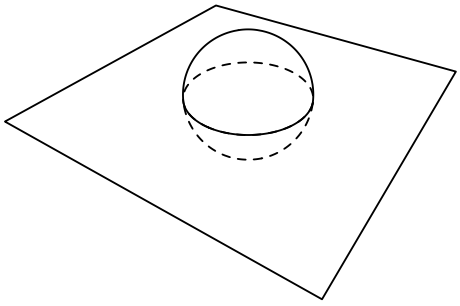


Abbildung 6: Eine Symmetrieebene des Raums um ein Schwarzes Loch.

Schwarzschildmetrik: Die Äquatorebene eines Schwarzen Lochs

In diesem Abschnitt wird die Metrik des Raums um ein Schwarzes Loch mit der gleichen Methode untersucht wie oben die Metrik des Torus. Das Resultat ist ein Anschauungsmodell, das anschließend für die Konstruktion von Geodäten genutzt wird. Wegen der Kugelsymmetrie des Schwarzen Lochs verläuft jede Geodäte in einer Ebene; diese Ebenen sind Symmetrieebenen des Raums (s. Abb. 6). Für die Untersuchung von Geodäten kann man sich deshalb auf eine Symmetrieebene beschränken, diese wird im Folgenden als Äquatorebene bezeichnet. Ihre Metrik ist

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{1 - r_\mathrm{S}/r}(\Delta r)^2 + r^2(\Delta\phi)^2, \tag{7}$$

wobei der Parameter r_S, der sogenannte Schwarzschildradius des Schwarzen Lochs, ein Maß für dessen Masse M ist: $r_\mathrm{S} = 2GM/c^2$ mit der Newtonschen Gravitationskonstanten G und der Lichtgeschwindigkeit c. Ist die Masse null, dann ist dies identisch mit Gleichung (2) für die Metrik der ebenen Fläche in Polarkoordinaten. Die Koordinate ϕ ist der Azimutwinkel, dessen Werte null und 2π identifiziert werden. Die Koordinate r ist eine radiale Koordinate.

Anhand der Metrik kann man die Äquatorfläche „nachbauen“, in derselben Weise, wie das oben für den Torus beschrieben wurde. Für das unten vorgestellte Modell wird der ϕ-Bereich in 12 Abschnitte von je $\pi/6$ Koordinatenlänge eingeteilt. Da die Metrik nicht von der Koordinate ϕ abhängt, brauchen die Flächenstücke nur für einen der 12 Abschnitte berechnet zu werden, die anderen Abschnitte sind identisch.

In r-Richtung wird der Bereich zwischen $1{,}25\,r_\mathrm{S}$ und $5\,r_\mathrm{S}$ betrachtet, der knapp außerhalb des Ereignishorizonts ($r = r_\mathrm{S}$) liegt. Er wird in drei Abschnitte der Koordinatenlänge $1{,}25\,r_\mathrm{S}$ eingeteilt (s. Abb. 7a links). Zu berechnen sind die Kantenlängen der drei Vierecke. Zwischen Eckpunkten mit gleicher r-Koordinate wird wie oben die Länge des Kreisbogens berechnet:

$$\Delta s = r\,\Delta\phi \qquad (\Delta r = 0). \tag{8}$$

Zwischen Eckpunkten mit gleicher ϕ-Koordinate geht der Metrikkoeffizient $1\big/(1 - r_\mathrm{S}/r)$ ein. Er hängt von r ab, ändert sich also längs der Kante. Für eine vereinfachte Berechnung der Kantenlänge in guter Näherung wird der Koeffizient für die mittlere r-Koordinate

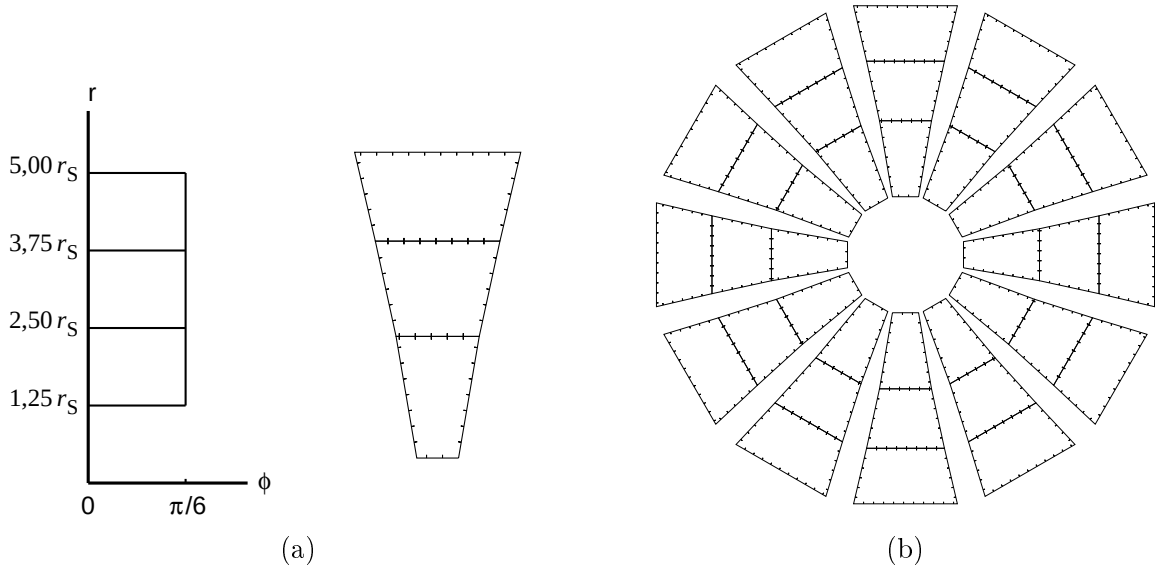
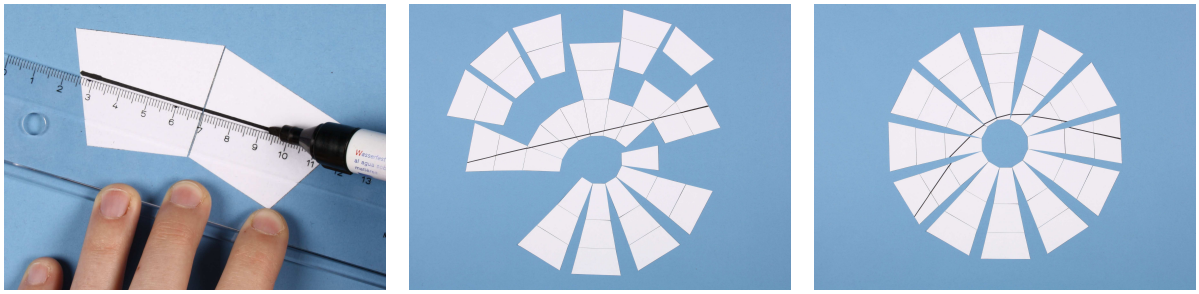


Abbildung 7: Geometrie der Äquatorebene eines Schwarzen Lochs. a: eine Spalte aus drei Vierecken im Koordinatenraum und die zugehörige Spalte aus drei Vierecken in der Fläche, b: die Fläche wird durch 12 identische Spalten dargestellt.

r_{mi} der Kante berechnet:

$$\Delta s = \sqrt{\frac{1}{(1 - r_{\mathrm{S}}/r_{\mathrm{mi}})}}\,\Delta r \qquad (\Delta\phi = 0). \tag{9}$$

Die beiden Seiten zu festem ϕ sind gleich lang. Dies spiegelt die ϕ-Unabhängigkeit der Metrik wieder. Die Flächenstücke werden dieser Symmetrie entsprechend als symmetrische Trapeze konstruiert. Abb. 7a (rechts) zeigt das Ergebnis für eine Spalte, Abb. 7b das vollständige Modell mit 12 Spalten, die den gesamten Bereich des Azimutwinkels ϕ abdecken. Die Flächenstücke bilden drei konzentrische Ringe. Es fällt auf, dass sie sich nicht lückenlos aneinanderfügen lassen. Dies zeigt an, dass sie eine Ebene beschreiben, die Teil eines gekrümmten Raums ist. In Abb. 7b sind sie aber auf einer ebenen Fläche ausgelegt, die Teil eines euklidischen Raums ist. Könnte man ein Schwarzes Loch der passenden Größe in die Mitte setzen, dann würden die Flächenstücke *so wie sie sind* lückenlos zusammenpassen. Wenn man die in [2] zur Verfügung gestellte Vorlage zu Abb. 7b im Format DIN A3 verwendet, dann hat das Modell einen Durchmesser von 27 cm und das dazu passende Schwarze Loch hat 2,4 Erdmassen.
Ein derartiges Modell, das einen gekrümmten Raum in Form von kleinen ungekrümmten Teilen nachbaut, bezeichnen wir als *Sektormodell*. Mit Sektormodellen von Flächen, Räumen und Raumzeiten kann man verschiedene Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie auf anschauliche Weise vermitteln [3, 4].
Zu Abb. 7b soll noch angemerkt werden, dass man auch im Fall der Äquatorebene die Flächenstücke zusammenkleben kann. Man erhält eine trichterförmige Fläche. Die innere Geometrie dieser Fläche ist identisch mit der inneren Geometrie der Äquatorebene. Dies



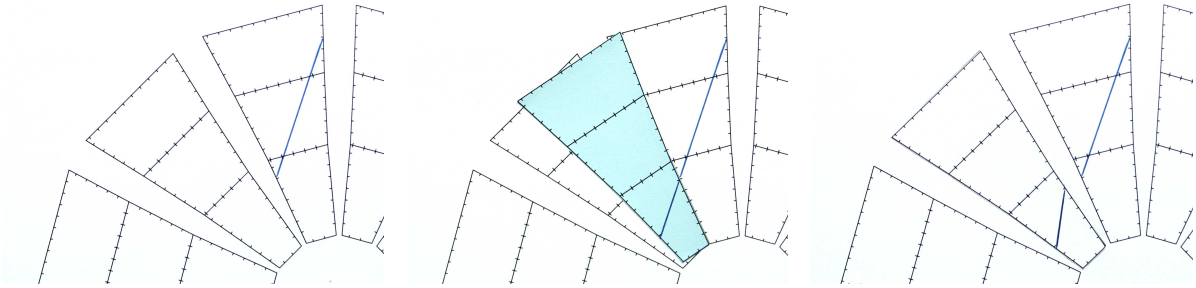
(a) (b) (c)

Abbildung 8: Geodäten in der Äquatorebene eines Schwarzen Lochs. a: Geodäten verlaufen lokal gerade, b: Konstruktion einer Geodäten, c: Verlauf der Geodäten bei symmetrischer Anordnung des Modells.

ist die Einbettungsfläche der Äquatorebene, die unter dem Namen Flammsches Paraboloid bekannt ist. Die Konstruktion einer Facettenfläche kann also auch dazu genutzt werden, Einbettungsflächen zu erhalten. Unsere Erfahrung zeigt, dass das Konzept der Einbettungsfläche schwierig zu vermitteln ist. Die Darstellung wird häufig missverstanden und als geometrische Form des Objekts interpretiert („Ein Schwarzes Loch ist ein Trichter“). Wir verzichten deshalb darauf, die Einbettungsfläche zum Thema zu machen und verwenden ausschließlich die ebene Darstellung von Abb. 7b.

Geodäten in der Äquatorebene eines Schwarzen Lochs

In der Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie breitet sich Licht lokal geradlinig aus. D. h. an jedem Punkt der Bahn wird die bisherige Richtung beibehalten, es gibt keine Kurve und keinen Knick. Analoges gilt für die Bewegung von freien Teilchen. Eine lokal gerade Linie wird als Geodäte bezeichnet. Möchte man Licht- oder Teilchenbahnen bestimmen, dann geht es also darum, Geodäten aufzufinden. In einem Sektormodell ist das besonders einfach: Innerhalb eines Sektors, der ja ein Stück ungekrümmten Raums darstellt, ist eine Geodäte eine Gerade; erreicht die Linie den Rand des Sektors, so wird sie in den Nachbarsektor fortgesetzt. Wie das zu geschehen hat, folgt aus der Definition: lokal gerade (Abb. 8a). Mit dieser Zeichenvorschrift kann man eine Geodäte quer durch die Äquatorebene konstruieren (Abb. 8b). In der symmetrischen Anordnung der Sektoren (Abb. 8c) erkennt man, dass die Richtungen „weit vor“ und „weit nach“ dem Schwarzen Loch verschieden sind. Die Konstruktion verdeutlicht, dass eine Linie, die durch einen Raumzeitbereich mit Krümmung führt und an jedem Punkt lokal gerade verläuft, nachher eine andere Richtung hat als vorher.
Um die Aussagekraft dieser Konstruktion richtig einzuschätzen, muss man zwei Dinge bedenken. Zum einen ist die so konstruierte Geodäte korrekt in dem Sinne, dass sie eine Lösung der Geodätengleichung darstellt. Da das Sektormodell den gekrümmten Raum näherungsweise beschreibt, ist auch die gezeichnete Geodäte eine Näherungslösung. Durch eine entsprechend feine Unterteilung können Geodäten prinzipiell auch mit hoher Genauigkeit konstruiert werden. Zum anderen muss bedacht werden, dass die



(a) (b) (c)

Abbildung 9: Konstruktion von Geodäten mit Transfersektoren. a: Die Geodäte wird bis zum Rand der Spalte gezeichnet, b: ... auf die Transferspalte fortgesetzt c: ... und von dort auf die Nachbarspalte übertragen.

konstruierte Linie zwar eine Geodäte ist, aber dennoch keinen Lichtstrahl darstellt. Die konstruierte Geodäte ist rein räumlich. Licht jedoch breitet sich in Raum und Zeit aus, so dass Lichtwege raumzeitliche Geodäten sind. Die rein räumliche Geodäte illustriert aber, wie Lichtablenkung prinzipiell zustandekommt.

Man kann das Sektormodell verwenden, um die Eigenschaften von (raumartigen) Geodäten genauer zu untersuchen. So kann man beispielsweise zeigen, dass Geodäten um so stärker abgelenkt werden, je näher sie dem Schwarzen Loch kommen. Man kann zwei Geodäten konstruieren, die parallel starten und erkennt, dass sie sich voneinander entfernen; dies zeigt an, dass die Krümmung der Äquatorfläche negativ ist. Und man überzeugt sich davon, dass man aus Geodäten ein „Zweieck“ bilden kann: Zwei Geodäten, die vom gleichen Punkt ausgehen, auf verschiedenen Seiten am Schwarzen Loch vorbeiführen und sich wieder treffen. Im Fall von Lichtstrahlen kommen auf diese Weise Doppelbilder zustande.

Um solche Konstruktionen durchzuführen, kann man so vorgehen wie in Abb. 8b dargestellt: Alle Sektoren werden ausgeschnitten, mit Sprühkleber auf Pappe aufgeklebt und nach Bedarf längs einer Geodäte oder aber in symmetrischer Anordnung ausgelegt.

Einfacher und schneller geht es mit einer anderen Methode: Es wird die in Abb. 7b gezeigte Vorlage in symmetrischer Anordnung verwendet, die nach Möglichkeit auf das Format DIN A3 vergrößert wird. (Eine Druckvorlage steht als Begleitmaterial zu diesem Beitrag auf [2] zur Verfügung.) Zusätzlich wird eine einzelne Spalte der Vorlage benötigt, die ausgeschnitten wird; dies sind die sogenannten Transfersektoren. Man beginnt nun mit dem Zeichnen auf der symmetrischen Vorlage, bis man an den Rand der Spalte gelangt (Abb. 9a). Dort wird der passende Transfersektor angelegt und die Linie wird geradlinig über die Spalte der Transfersektoren fortgesetzt (Abb. 9b). Von den Transfersektoren wird die Linie auf die Nachbarspalte der Vorlage übertragen (Abb. 9c). Dieses Verfahren wird bis zum gewünschten Endpunkt fortgesetzt.

Die zeichnerische Konstruktion von Geodäten kann auf Raumzeiten erweitert werden. Es ist dann möglich, Weltlinien von Photonen und freien Teilchen zu konstruieren und damit beispielsweise die gravitative Rotverschiebung zu untersuchen. Auch andere Aspekte der Allgemeinen Relativitätstheorie können anhand von Sektormodellen dargestellt werden.

Insbesondere kann man die Krümmung veranschaulichen, nicht nur von Flächen, sondern auch von dreidimensionalen gekrümmten Räumen und von Raumzeiten. Mehr zu Sektormodellen sowie Druckvorlagen für Modelle sind unter [5] zu finden; diese Zusammenstellung zu Sektormodellen und ihrem Einsatz bei der Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie wird weiter ausgebaut werden.

Lichtablenkung in der Astronomie

Wie zeigt sich die Krümmung des Raums bzw. der Raumzeit bei astronomischen Beobachtungen? Auch wenn die am Anfang des Artikels erwähnte Ablenkung des Lichts am Sonnenrand vernachlässigbar klein erscheint, macht sie sich doch bei modernen Beobachtungen bemerkbar.

Eine aktuell laufende Astrometrie-Mission, *Gaia* [6], erstellt die bisher umfangreichste und genaueste Karte unserer Galaxie, indem die Positionen von mehr als einer Milliarde Sternen mit extremer Genauigkeit vermessen werden. Für alle Objekte heller als Magnitude 15 wird Gaia die Position mit einer Genauigkeit von 24 Mikrobogensekunden vermessen. Diese Genauigkeit entspricht dem Durchmesser eines menschlichen Haares in 1000 km Entfernung. Die Genauigkeit ist so groß, dass die durch die Raumzeitkrümmung der Sonne und sogar der größeren Planeten verursachte Lichtablenkung berücksichtigt werden muss und zwar nicht nur für Beobachtungen in der Nähe der Richtung zur Sonne, sondern in *allen* Himmelsrichtungen. Wie oben beschrieben, wird Licht direkt am Sonnenrand um ca. 1,75 Bogensekunden abgelenkt. Licht, das senkrecht zur Sichtlinie zur Sonne eintrifft, wird noch um ca. 4000 Mikrobogensekunden abgelenkt, Licht das am Rand des Jupiters vorbeiläuft um 16000 Mikrobogensekunden. Diese Ablenkwinkel sind weit größer als die Genauigkeit des Gaia-Teleskops, so dass ohne eine Korrektur die Ergebnisse stark verfälscht würden. Hier scheint die allgemeinrelativistische Korrektur auf den ersten Blick ein notwendiges Übel zu sein, die Beobachtungen werden aber auch dazu verwendet, die Einsteinsche Theorie zu testen.

Das am Anfang des Beitrags gezeigte Bild des Schwarzen Lochs weist eine ringförmige lilafarbene Struktur auf, einen sogenannten *Einsteinring*. Er entsteht durch Lichtstrahlen, die von einer genau hinter dem Schwarzen Loch liegenden lilafarbenen Gaswolke stammen und die auf Grund der Symmetrie auf allen Seiten um das Schwarze Loch herum zum Betrachter gelangen. Einstein hat die Entstehung eines solchen Rings 1936 vorhergesagt. Schwarze Löcher oder einzelne Sterne sind aber vergleichsweise klein, so dass es sehr schwer ist, die Lichtablenkungseffekte in ihrer Nähe direkt zu beobachten, Einstein schrieb: „Of course, there is no hope of observing this phenomenon directly.“ [7]. Besteht die das Licht ablenkende Masse jedoch aus einer ganzen Galaxie oder einem Galaxiencluster, wird die Ablenkung beobachtbar. Abb. 10 zeigt einen nahezu perfekten Einsteinring, der mit dem ALMA-Radioteleskop aufgenommen wurde [8]. Das Licht der abgebildeten Galaxie SDP.81 war 11,4 Milliarden Jahre unterwegs; es stammt aus einer Zeit als das Universum nur 15% der heutigen Größe hatte. Die (unsichtbare) Vordergrundgalaxie, die als Gravitationslinse wirkt, ist ca. 4 Milliarden Lichtjahre entfernt. Das Abbild von SDP.81 wird zwar stark verzerrt, aber auch stark vergrößert, so dass Strukturen sichtbar werden, die ohne die Gravitationslinse nicht erfassbar wären. Die

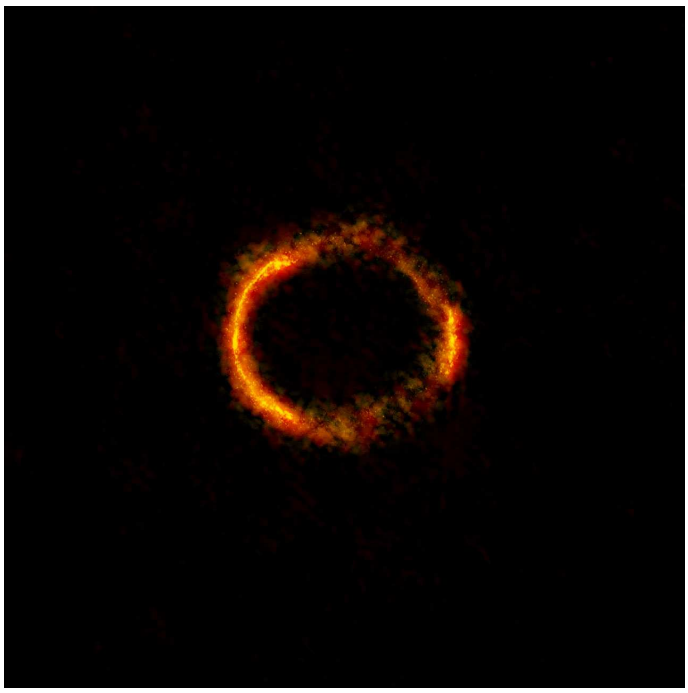


Abbildung 10: Ein fast perfekter Einsteinring, aufgenommen mit dem ALMA-Radioteleskop. Quelle: ALMA (NRAO/ESO/NAOJ); B. Saxton NRAO/AUI/NSF

gravitative Lichtablenkung wird hier als Werkzeug verwendet.
In den bisher genannten Beispielen wird das Licht nur wenig abgelenkt. Große Ablenkwinkel treten dann auf, wenn das Licht nahe an einem Neutronenstern oder an einem Schwarzen Loch vorbeiläuft, wie z. B. in Abb. 2. Aufgrund der Kleinheit dieser kompakten Himmelskörper ist es bis heute noch nicht möglich, solche starken Lichtablenkungseffekte mit einem Teleskop zu beobachten. Das Event Horizon Telescope [9] ist ein Zusammenschluss von über die ganze Erde verteilten Radioteleskopen. Ein Ziel ist, ein detailliertes Bild des Schwarzen Lochs im Zentrum unserer Milchstraße zu erhalten. Im Moment ist die Auflösung noch nicht gut genug, aber geplante Erweiterungen sollen es in den nächsten Jahren ermöglichen, den Ereignishorizont des Schwarzen Loches abzubilden. Dann wird es erstmals möglich sein, den Einfluss des starken Gravitationsfelds in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Schwarzen Lochs auf die Lichtausbreitung zu beobachten.

Literatur

[1] K. Schwarzschild, 1916, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, Sitzung vom 3. Februar 1916; S. 189–196

[2] C. Zahn, U. Kraus, 2016,

`http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/aur16/aur16.html`

[3] U. Kraus, C. Zahn, 2005, Wir basteln ein Schwarzes Loch – Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie, Praxis der Naturwissenschaften Physik,

Didaktik der Relativitätstheorien, Heft 4/54, 38–43

[4] C. Zahn, U. Kraus, 2014, Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Teil 1: Gekrümmte Räume und Raumzeiten, `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1/sectormodels1.html`, Eur. J. Phys. **35** (5), article id. 055020 (engl. Version)

[5] C. Zahn, U. Kraus, `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`

[6] Gaia: `http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Gaia_overview`

[7] A. Einstein, Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field, Science 04 Dec 1936: Vol. 84, Issue 2188, pp. 506–507

[8] ALMA Announcement: `http://www.eso.org/public/announcements/ann15028/`

[9] Event Horizon Telescope: `http://www.eventhorizontelescope.org/`

Ute Kraus, Corvin Zahn
Institut für Physik, Universität Hildesheim, Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim
E-mail: ute.kraus@uni-hildesheim.de, corvin.zahn@uni-hildesheim.de

17. Juni 2016